

EL SECTOR F. A. O. EN LA TABLA "INPUT-OUTPUT" DE LA ECONOMÍA ESPAÑOLA

Por

ANGEL ALCAIDE INCHAUSTI

Doctor en Ciencias Económicas

S U M A R I O :

CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL ANÁLISIS «INPUT-OUTPUT».—LA TABLA «INPUT-OUTPUT» DE LA ECONOMÍA ESPAÑOLA DE 1954.—EL SECTOR F. A. O. EN LA TABLA «INPUT-OUTPUT».—LA TABLA DE COEFICIENTES TÉCNICOS Y LA MATRIZ INVERSA.—MEDIDA EN QUE DEBE VARIAR LA PRODUCCIÓN DE CADA SECTOR PARA QUE PUEDA AUMENTAR LA DEMANDA FINAL DE LOS PRODUCTOS DEL SECTOR F. A. O. EN UNA DETERMINADA PROPORCIÓN.—APÉNDICE MATEMÁTICO: Resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de Crout. Inversión de una matriz por el método de Crout.

CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL ANÁLISIS «INPUT-OUTPUT».

A finales del año 1940 el profesor ruso-americano WASSILY W. LEONTIEF publicaba su libro titulado *The Structure of American Economy, 1919-1939* (*), originado por sus investigaciones en el National Bureau of Economic Research y merced al apoyo que le prestó el Committee of Research in the Social Sciences. En una segunda edición, publicada diez años más tarde, se perfeccionaban las ideas vertidas en la primera edición, y en los *Studies in the Structure of the American Economy*, publicado en 1953, colaboran con LEONTIEF los profesores CHENERY, ISARD, FERGUSON y otros econométricos en la resolución de diversos problemas planteados en el análisis *input-output*, como los de análisis regional, agregación, análisis de algunos sectores y análisis dinámico, principalmente.

(*) Ha sido traducido al castellano por FABIÁN ESTAPÉ, con el título *La estructura de la economía americana, 1919-1939*. Ed. José María Bosch, Barcelona, 1958.

El contenido del análisis *input-output*, según el propio LEONTIEF, es «una aplicación de la teoría del equilibrio económico general a un estudio empírico de las interrelaciones entre las diferentes partes de una economía nacional» (**). El instrumento básico del análisis es la Tabla *input-output* o tabla estadística de doble entrada, en cuyo encabezamiento y en su columna matriz figuran las mismas rúbricas (correspondientes a los sectores o ramas de actividad en que se ha dividido la economía nacional); estos sectores se dividen en dos grupos: *sectores productivos* —o «industrias», en la terminología de LEONTIEF— y *sectores finales*.

Las Tablas desempeñan por sí mismas un importante papel en el conocimiento estadístico de la economía al señalar para un período de tiempo determinado —un año generalmente— las transacciones efectuadas entre los distintos sectores de la actividad económica; conocimiento estadístico que se complementa con el de las cuentas de la Contabilidad Nacional, ya que mientras éstas explican más detalladamente los denominados sectores externos de la economía —economías familiares, sector público, comercio exterior y formación de capital—, las Tablas examinan mejor el «sector empresas», constituido por el conjunto de los «sectores productivos».

La utilidad primordial del análisis *input-output* reside en su aplicación para la previsión económica; para llevar a cabo este propósito es preciso aceptar, entre otras, una hipótesis restrictiva: la constancia de los *coeficientes técnicos*. Un coeficiente técnico es el resultado de dividir la cifra de una casilla de la Tabla por el total de la columna a que pertenece, y los correspondientes a una determinada columna representan la cantidad que debe emplearse de los productos de cada sector productivo para obtener una unidad de la producción total del sector. Como la razón principal para que varíe un determinado coeficiente técnico estriba en la posibilidad de mejora de la técnica, la hipótesis es admisible siempre que la previsión no se refiera a un momento del tiempo muy distante de aquél a que viene referida la Tabla.

Mediante una operación matemática, la *inversión de una matriz* deducida de la de los coeficientes técnicos, se pueden calcular los efectos directos e indirectos que produce una variación de la

(**) Ob. cit., pág. 13.

demanda final —bienes y servicios adquiridos a los sectores productivos por los sectores externos— en el sistema económico. Se puede calcular, por ejemplo, en qué medida ha de variar la producción de cada sector para alcanzar un determinado nivel de inversiones en construcción y obras públicas; de aquí se deduce el indudable interés del método en los programas de desarrollo económico.

LA TABLA «INPUT-OUTPUT» DE LA ECONOMÍA ESPAÑOLA DE 1954.

En el último año de 1958, el Instituto de Estudios Políticos publicó la primera Tabla *input-output* de la economía española (***). Viene referida al año 1954 y las cifras que figuran en ella corresponden a millones de pesetas corrientes. Se divide en 28 sectores productivos y cuatro sectores finales. En una Tabla rectangular se dividen los primeros en subsectores, de acuerdo con la clasificación presentada en el Cuadro núm. 1:

CUADRO NUM. 1

| SECTORES | SUBSECTORES |
|--|---|
| 1. Cereales y leguminosas. | Trigo. - Cebada. - Centeno. - Maíz. - Arroz. - Otros cereales. - Leguminosas. - Paja. |
| 2. Olivo. | Olivo. |
| 3. Vid. | Uva para vino y otros productos de la vid. - Uva consumo directo y pasas. |
| 4. Frutos y otros productos agrícolas. | Frutos frescos. - Frutos secos. - Hortalizas. - Remolacha azucarera y caña de azúcar. - Patata y tubérculos. - Tabaco. - Forrajes y prados. - Condimentos. - Plantas textiles y oleaginosas. - Plantones, flores y herboristería. |
| 5. Montes. | Madera. - Leña. - Carbón vegetal. - Corcho en bruto. - Materias curtientes. - Productos forestales varios. |
| 6. Pesca. | Pesca en agua salada. - Pesca en agua dulce. |
| 7. Productos animales. | Ganado bovino. - Ganado ovino. - Ganado cabrío. - Ganado equino. - Ganado porcino. - Avicultura y cunicultura. - Apicultura. - Gusano de seda. - Caza. |

(***) Instituto de Estudios Políticos: *La estructura de la economía española, Tabla "input-output"*. Madrid, 1958.

| SECTORES | SUBSECTORES |
|--|--|
| 8. Carbones minerales. 9. Minas y canteras. | Antracita. - Hulla. - Lignito. Minerales metálicos. - Canteras y tierras. - Minerales no metálicos. |
| 10. Conservas. | Leche condensada y en polvo. - Conservas de pescado en aceite y escabeche. - Aceituna aderezada. - Conservas vegetales. |
| 11. Industrias alimentarias. | Azúcar. - Salazones y secado de pescado. - Industrias lácteas. - Aceite de oliva y subproductos. - Extracción de aceite de orujo y desdoblamiento de aceites y grasas. - Pieles en bruto. - Pastas y pastelería. - Cacao, chocolate, turrone y caramelos. - Tostaderos de café y sucedáneos. - Helados. - Fábricas de harinas. - Molinos de cereales panificables y piensos. - Molinos arroceros. - Fábricas de purés y harinas industriales. - Piensos compuestos. - Fábricas de pan. - Tabaco elaborado. - Carnes y subproductos. - Industrias cárnicas y grasas animales. - Industrias alimentarias diversas. |
| 12. Bebidas y alcoholes. | Cerveza y malta cervecera. - Industrias vinícolas y sidrerías. - Bebidas alcohólicas, espirituosas, gaseosas y zumos. - Alcoholes vínicos. - Alcoholes de melazas. - Aguas minero-medicinales envasadas. |
| 13. Industria textil. | Algodón. - Lana. - Seda. - Fibras celulósicas y artificiales. - Fibras duras. - Confección. |
| 14. Piel y calzado. | Industrias del curtido. - Calzados y manufacturas. |
| 15. Industrias intermedias de la madera, corcho y papel. | Preparado y aserrado de la madera. - Carpintería y tratamiento de la madera. - Primera transformación del corcho. - Fabricación del papel y pastas para papel. |
| 16. Industrias de la madera, corcho, editorial, goma, etc. | Fabricación de muebles y artículos de madera. - Manufacturación del corcho. - Fabricación de artículos de caucho. - Prensa, artes gráficas y manufacturados de papel. |
| 17. Industrias químicas. | Destilerías de glicerina y refinerías de aceite. - Jabón común. - Aceites y grasas hidrogenadas, margarinas y grasas concretas. - Ácidos, bases y sales. - Metaloides y frío industrial. - Abonos. - Química orgánica. - Química farmacéutica. - Ceras y parafinas. - Hidratos de carbono. - Plásticos. Explosivos. - Resinas. - Perfumería. - Colorantes. Insecticidas. - Aceites y grasas industriales. - Fabricación de curtientes vegetales. |

| SECTORES | SUBSECTORES |
|--|--|
| 18. Metalurgia y siderurgia. | Siderurgia. - Metalurgia no férrea. - Chatarra. |
| 19. Industrias mecánicas. | Maquinaria industrial. - Maquinaria y material eléctrico. - Construcción naval, aérea y material de guerra. - Material ferroviario. - Industrias metálicas de la construcción. - Transformación y manufacturas férreas. - Transformación y manufacturas no férreas. - Automóvil. |
| 20. Industrias de minerales no metálicos. | Cementos y cal hidráulica. - Derivados del cemento. - Cerámica. - Vidrio. - Piedras y tierras. |
| 21. Construcción y obras públicas. | Edificación y obras públicas. - Reparaciones, |
| 22. Gas y otros derivados del carbón y refinerías de petróleo. | Destilación de carbón y madera. - Lubricantes. - Industria del gas. - Petróleos y derivados. - Coque metalúrgico. - Aglomerados de carbón. |
| 23. Energía eléctrica. | Energía eléctrica. |
| 24. Distribución de agua. | Distribución de agua. |
| 25. Servicios industriales y personales. | Banca y ahorro. - Seguros. - Espectáculos. - Comunicaciones. - Alquileres de edificios. - Otros servicios. |
| 26. Transportes. | Ferrocarriles. - Metro y tranvías. - Carretera y urbano. - Marítimos. - Aéreos. - Tracción animal. |
| 27. Comercio. | Comercio interior. |
| 28. Hostelería y similares. | Hostelería y similares. |

Los cuatro sectores finales son: Comercio exterior (Exportaciones en la columna e Importaciones en la fila); Gobierno (Consumo en la columna e Impuestos directos e indirectos en la fila); Formación bruta de capital privado y Economías familiares (Consumo en la columna y Rentas y amortizaciones en la fila).

El criterio de valoración utilizado en la elaboración de la Tabla española ha sido el de *precios del productor*, por lo que se han imputado los gastos de transporte y márgenes comerciales al sector consumidor y no al productor de la mercancía. La recogida de información básica se realizó a través del Servicio Sindical de Estadística, y en la etapa de depuración de los datos se contrastaron las dobles cifras que fueron obtenidas para cada casilla proceden-

tes de dos fuentes de información distinta: la del sector para el que esta casilla era una cifra de compra, y la de aquél para el cual era una cifra de venta. Los trabajos de inversión de la matriz se efectuaron en el «cerebro electrónico» del Instituto de Cálculo de Roma.

EL SECTOR F. A. O. EN LA TABLA «INPUT-OUTPUT».

El Instituto de Estudios Agro-Sociales, en el Informe provisional para la F. A. O. sobre «Proyecto de fomento para la región mediterránea. España», incluye una Tabla *input-output*, Tabla I, deducida de la Tabla *input-output* de la economía española. Mediante la agregación de los Sectores agrícolas (1, 2, 3 y 4), Montes (5), Pesca (6), Productos animales (7), Conservas (10), Industrias alimentarias (11) y Bebidas y Alcoholes (12), se ha obtenido un nuevo sector, denominado «Sector F. A. O.», por ser prácticamente estas actividades económicas las que encuadra esta Organización Internacional de la Alimentación y la Agricultura. Asimismo, los sectores de Carbones (8) y Minas y Canteras (9) se han agrupado en el que aquí se denomina «Industrias extractivas»; con los sectores de la Industria Textil (13) y de la Piel y Calzado (14) se ha formado el de «Piel y Textil»; los sectores 15, 16 y 17, que comprenden las industrias de la madera, corcho, papel, caucho y químicas, constituyen el nuevo cuarto sector; el de «Otras industrias manufactureras» ha resultado de la agregación de los sectores: Metalurgia y siderurgia (18), Industrias mecánicas (19) e Industrias de minerales no metálicos (20); se ha conservado con el nombre de «Construcción» el sector 21 de la Tabla española; el nuevo sector de «Energía» está formado por los sectores de Gas y otros derivados del carbón y refinerías de petróleo (22), Energía eléctrica (23) y Distribución de agua (24); el sector de Servicios industriales y personales (25) se ha agregado al de Hostelería (28) para formar el nuevo sector de «Servicios»; y, por último, se ha elaborado un solo sector para comprender el Comercio interior (27) y los Transportes (26). No se han modificado los sectores finales, salvo en lo que afecta a la natural agregación.

Leyendo horizontalmente, para cada uno de los nuevos sectores productivos de la Tabla I se tiene, en primer lugar, las ventas del sector a los demás sectores productivos y, en segundo tér-

Tabla I
Tabla «Input-outputs», 1954, para el análisis del Sector F. A. O.

| Sectores adquirentes | DEMANDA FINAL | | | | | | | | | | | | | «OUTPUT» TOTAL (Producción bruta total) | | |
|---|---------------|---------------------------|------------------|--|---|-------------------|-----------|--------------------------|---------------------------|--|--|-----------|--------------------------|--|---------------------------|------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | | | |
| Sectores productores | Sector FAO | Industrias extractivas | Piel y textil | Química, madera, corcho, caucho y carbay | Otras indus- trias manu- factureras | Construc- ción | Energía | Servicio y Hostelería | Comercio y Transportes | Total transac- ciones inter- industriales | Comercio inter- sectorial (excepto) | Gobierno | Formación bruta c. p. | Economías familiares | Total demanda final | |
| 1. Sector F. A. O. | 94.726,93 | 80,02 | 5.043,70 | 5.507,74 | 189,34 | 3112 | 90,50 | 10.633,33 | 227,31 | 116.409,99 | 7.552,31 | 5.325,33 | 6.121,59 | 67.525,27 | 86.824,50 | 203.234,49 |
| 2. Industrias extractivas | 243,22 | 145,68 | 104,18 | 942,27 | 3.039,46 | 228,01 | 1.612,43 | 99,87 | 728,04 | 7.141,16 | 1.558,15 | 50,20 | — | 454,81 | 2.063,16 | 9.204,32 |
| 3. Piel y textil | 1.782,69 | 136,15 | 7.077,10 | 357,20 | 249,58 | 124,0 | 11,70 | 796,12 | 226,60 | 10.651,54 | 686,29 | 874,32 | — | 22.510,03 | 24.070,64 | 34.722,18 |
| 4. Química, madera, corcho, papel y caucho | 3.621,23 | 620,50 | 1.878,13 | 13.229,09 | 1.371,36 | 3.064,46 | 142,49 | 1.739,83 | 2.540,90 | 28.707,59 | 1.935,33 | 2.266,40 | 2.122,13 | 11.855,67 | 17.639,53 | 46.547,52 |
| 5. Otras industrias manufac- turas | 1.313,76 | 335,92 | 359,10 | 805,98 | 13.700,25 | 9.224,85 | 714,61 | 816,52 | 1.846,77 | 29.821,76 | 1.267,02 | 3.021,18 | 9.019,48 | 3.340,27 | 16.647,95 | 46.469,70 |
| 6. Construcción | 602,35 | 33,80 | 83,10 | 144,60 | 157,90 | — | 38,58 | 1.277,55 | 465,22 | 2.803,10 | — | 6.753,74 | 23.200,00 | 293,69 | 30.247,43 | 33.050,53 |
| 7. Energía | 983,94 | 687,25 | 308,51 | 871,04 | 1.693,30 | 227,02 | 466,13 | 382,05 | 2.873,52 | 8.522,76 | 1.765,90 | 470,40 | — | 1.995,53 | 4.231,83 | 12.754,59 |
| 8. Servicios y Hostelería | 4.375,61 | 646,76 | 930,07 | 1.730,43 | 1.872,79 | 1.888,69 | 403,67 | 3.633,27 | 7.087,88 | 22.270,17 | 8,00 | 621,13 | — | 48.745,12 | 49.371,25 | 71.644,42 |
| 9. Comercio y Transportes | 7.583,89 | 278,26 | 3.324,25 | 2.579,52 | 2.806,78 | 2.409,74 | 921,03 | 5.011,54 | 8.006,91 | 33.523,91 | 1.074,00 | 2.256,30 | — | 44.547,80 | 47.878,10 | 81.402,01 |
| Total transacciones inter- industriales | 115.233,61 | 2.964,33 | 19.108,14 | 26.167,87 | 25.060,76 | 17.982,29 | 4.431,14 | 24.290,08 | 24.607,15 | 259.853,37 | 15.807,00 | 21.639,00 | 40.463,20 | 201.265,19 | 279.174,39 | 599.026,76 |
| 10. Comercio exterior (Importacio- nes) | 3.647,14 | 18,00 | 2.056,89 | 2.371,86 | 1.307,56 | 237,60 | 3.337,35 | 413,06 | 445,20 | 15.034,67 | — | 131,84 | 5.441,80 | 988,82 | 6.562,46 | 21.597,13 |
| 11. Gobierno | 4.714,38 | 542,01 | 1.128,61 | 1.480,27 | 2.079,44 | 660,18 | 1.267,09 | 4.076,67 | 6.654,79 | 22.605,44 | — | 417,09 | — | 15.368,29 | 15.785,38 | 38.390,82 |
| 12. Formación bruta de capital pri- vado | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 13. Economías familiares | 79.639,36 | 5.679,98 | 12.428,54 | 16.527,52 | 17.421,94 | 14.163,46 | 3.119,00 | 42.869,61 | 49.694,87 | 241.534,28 | — | 14.881,00 | — | 4.967,28 | 19.846,28 | 261.382,56 |
| Total sectores finales | 88.000,88 | 6.239,99 | 15.614,04 | 20.279,65 | 21.408,94 | 15.061,24 | 8.923,45 | 47.351,34 | 56.794,86 | 279.174,39 | — | 15.429,93 | 5.441,80 | 21.324,39 | 42.196,12 | 321.370,51 |
| «INPUT» TOTAL (Gasto bruto total). | 208.234,49 | 9.204,32 | 34.722,18 | 46.547,52 | 48.469,70 | 33.060,53 | 12.764,59 | 71.644,42 | 81.402,01 | 539.026,76 | 15.807,00 | 37.066,93 | 45.906,00 | 222.669,68 | 321.370,51 | 860.397,27 |

TABLA I
 Tabla «Input-outputs», 1954, para el análisis del Sector F. A. O.

| Sectores productores | Sectores adquirentes | | | | | | | | | | | | | -OUTPUT- TOTAL (Producción bruta total) | |
|---|---------------------------|------------------|--|---|-------------------|-----------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------------------|-----------|--------------------------|-------------------------|--|------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | | |
| Sector F.A.O. | Industrias extractivas | Piel y textil | Química, corcho, papel y caucho | Otras in- dustrias ma- nufactureras y factoreras | Construc- ción | Energía | Servicios y Hostelería | Comercio y Transportes | Comercio y Transportes | Comercio exterior (export.) | Gobierno | Formación bruta c. p. | Economías familiares | Total demanda final | |
| 1. Sector F. A. O. | 94.726,83 | 80,02 | 5.049,70 | 5.807,74 | 169,34 | 31,12 | 90,50 | 10.833,33 | 227,31 | 116.409,89 | 7.852,31 | 6.121,69 | 87.625,27 | 86.824,50 | 203.234,49 |
| 2. Industrias extractivas | 243,22 | 145,68 | 104,18 | 942,27 | 3.039,46 | 226,01 | 1.612,43 | 99,87 | 728,04 | 7.141,16 | 1.558,15 | 50,20 | 454,81 | 2.063,16 | 9.204,32 |
| 3. Piel y textil | 1.782,69 | 136,15 | 7.077,10 | 387,20 | 249,58 | 12,40 | 11,70 | 796,12 | 228,60 | 10.651,54 | 686,29 | 874,32 | 22.510,03 | 24.070,64 | 34.722,18 |
| 4. Química, madera, corcho, papel y caucho | 3.621,23 | 620,50 | 1.878,13 | 13.229,09 | 1.871,36 | 3.064,46 | 142,49 | 1.739,83 | 2.540,90 | 28.707,99 | 1.595,33 | 2.266,40 | 11.855,67 | 17.839,53 | 46.547,62 |
| 5. Otras industrias manufac- turas | 1.313,75 | 335,92 | 359,10 | 805,98 | 13.700,25 | 9.928,85 | 714,61 | 816,52 | 1.846,77 | 29.821,75 | 1.267,02 | 3.021,18 | 9.019,48 | 3.340,27 | 16.647,95 |
| 6. Construcción | 602,35 | 33,80 | 83,10 | 144,60 | 157,90 | — | 38,58 | 1.277,55 | 465,22 | 2.803,10 | — | 6.753,74 | 23.200,00 | 293,69 | 30.247,43 |
| 7. Energía | 983,94 | 687,25 | 308,51 | 871,04 | 1.693,30 | 227,02 | 498,13 | 382,05 | 2.873,82 | 8.522,76 | 1.765,90 | 470,40 | 1.995,53 | 4.231,83 | 12.754,69 |
| 8. Servicios y Hostelería | 4.375,61 | 646,76 | 930,07 | 1.730,43 | 1.572,79 | 1.889,69 | 403,67 | 3.833,27 | 7.087,88 | 22.270,17 | 8,00 | 621,13 | 48.742,12 | 49.371,25 | 71.641,42 |
| 9. Comercio y Transportes | 7.583,89 | 278,25 | 3.324,25 | 2.579,52 | 2.606,78 | 2.609,74 | 921,03 | 5.011,54 | 8.608,91 | 33.523,91 | 1.074,00 | 2.256,30 | 44.547,80 | 47.878,10 | 81.402,01 |
| Total transacciones inter- industriales | 115.233,61 | 2.964,33 | 19.108,14 | 26.167,87 | 25.060,76 | 17.989,29 | 4.431,14 | 24.290,08 | 24.607,15 | 259.852,37 | 16.807,00 | 21.639,90 | 40.463,20 | 201.265,19 | 539.026,76 |
| 10. Comercio exterior (Importacio- nes) | 3.647,14 | 18,00 | 2.056,89 | 2.571,86 | 1.907,66 | 297,60 | 3.937,96 | 413,06 | 445,20 | 15.034,67 | — | 131,84 | 5.441,80 | 988,82 | 21.597,13 |
| 11. Gobierno | 4.714,38 | 542,01 | 1.128,61 | 1.480,27 | 2.079,44 | 660,18 | 1.267,09 | 4.078,67 | 6.654,79 | 22.605,44 | — | 417,09 | — | 15.368,29 | 38.390,82 |
| 12. Formación bruta de capital pri- vado | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 13. Economías familiares | 79.639,36 | 5.679,98 | 12.428,54 | 16.527,52 | 17.421,94 | 14.163,46 | 3.119,00 | 42.859,61 | 49.694,87 | 241.534,28 | — | 14.881,00 | — | 4.967,28 | 19.848,28 |
| Total sectores finales | 88.000,88 | 6.239,99 | 15.614,04 | 20.379,65 | 21.408,94 | 15.061,24 | 8.823,45 | 47.351,34 | 56.794,86 | 279.174,39 | — | 15.429,93 | 5.441,80 | 21.324,39 | 42.196,12 |
| «INPUT» TOTAL (Gasto bruto total). | 203.234,49 | 9.204,32 | 34.722,18 | 46.547,62 | 46.469,70 | 33.050,53 | 12.754,59 | 71.641,42 | 81.402,01 | 539.026,76 | 15.807,00 | 37.068,93 | 45.905,00 | 222.589,58 | 321.370,51 |

mino, las ventas a los empleos finales de bienes y servicios, o sea a la exportación (10), al Gobierno (11), a la formación de capital (12) y a las economías familiares (13). Así, al sector productivo que más vende el sector F. A. O. (1) es al propio sector —esta venta se suele denominar *reempleo* y su enorme cuantía, en este caso, está justificada por las ventas de la agricultura a las industrias alimentarias y de bebidas—; las ventas al sector «Servicios» (8) ocupan el segundo lugar, en virtud del consumo de productos alimenticios y bebidas que hace la Hostelería, y también tienen cierta importancia las ventas a «Química, madera, corcho, papel y caucho» (4) y a «Piel y Textil» (3); las ventas al sector «Comercio exterior» alcanzan más del 50 por 100 de las exportaciones totales de España en 1954; las ventas al Gobierno (11) son más del 14 por 100 de los gastos totales del Estado —por suministros a los ejércitos principalmente—; al sector de «Formación bruta de capital» (12) sale la repoblación forestal, las plantaciones de árboles frutales y olivos y las crías de los animales nacidas en el año y no sacrificadas; el consumo de las «Economías familiares» (13) más importante es el de los productos del sector F. A. O. —67,5 miles de millones de pesetas en 1954—, y esto sin tener en cuenta que la mayor parte de la salida de Servicios (8) a «Economías familiares» procede de Hostelería. Sin embargo, de los 203,2 miles de millones de pesetas corrientes que, a precios del productor, vale la producción bruta total del sector F. A. O. en 1954, solamente 86,8 miles de millones es absorbido por la demanda final, mientras 116,4 miles de millones son ventas a los sectores productivos.

La lectura vertical de un sector de la Tabla I nos dice, en primer término, las compras del sector a los nueve sectores productivos y, en segundo término, las importaciones de materias primas —si se trata de un sector productivo— o de bienes de consumo —si se trata de un sector final— requeridas por el sector (fila 10); los impuestos pagados por el sector (fila 11) y las rentas pagadas a los factores de la producción (trabajo, capital, empresario), además de las amortizaciones —gastos de depreciación y renovación del equipo capital—. Para el sector F. A. O. las compras al propio sector, 94,7 miles de millones de pesetas corrientes, son las más importantes —por las razones expresadas al hablar del «reempleo», en el caso de las ventas—, siguiéndole en importancia las compras de servicios de Transporte y márgenes comerciales (9), con

7,6 miles de millones; Servicios (8) —Servicios bancarios, seguros, publicidad y servicios técnicos, principalmente—, con 4,4 miles de millones; Química, madera, etc. (4) —abonos, principalmente—, con 3,6 miles de millones; Piel y Textil (3) —saquerío, guarnicionería, etc.—, con 1,8 miles de millones; Energía (7), con mil millones, aproximadamente; Construcción (6) —reparaciones, pues las demás salidas de Construcción lo son íntegramente al sector de Formación de capital—, con 0,6 miles de millones, e Industrias extractivas (2) —carbones y una pequeña cantidad de sal común—, 0,24 miles de millones. Las Importaciones (10) —abonos, hojalata para las conservas, etc.— fueron de 3,6 miles de millones en 1954; los agricultores y las fábricas de productos alimenticios y bebidas pagaron al Gobierno impuestos (11) por un valor de 4,7 miles de millones, y los sueldos y salarios, rentas de la tierra y del capital, beneficios y amortizaciones (13) fueron de 79,6 miles de millones.

LA TABLA DE COEFICIENTES TÉCNICOS Y LA MATRIZ INVERSA.

Al objeto de poder realizar un análisis *input-output* elemental se ha reducido la Tabla I a otra de seis sectores productivos, Tabla II, en la que se han agrupado los sectores 2, 4 y 5 en un «Sector industrial» y los 8 y 9 en un «Sector de servicios», permaneciendo invariables los otros cuatro sectores. Esta Tabla II se presenta en miles de millones de pesetas y se agregan los sectores finales para que sea más fácilmente manejable por el lector (aunque sin perjuicio de haber trabajado con las cifras de millones de pesetas para los cálculos que ahora se detallarán).

De la Tabla II se ha deducido la Tabla III de coeficientes técnicos, en la que a cada casilla corresponde uno de tales coeficientes, obtenido por división del valor de la correspondiente casilla de la Tabla II por el total de su fila o columna (*output* o *input* total).

Por tanto, cada uno de estos coeficientes expresa la proporción de productos de un sector consumida por el que da nombre a la columna; por ejemplo, el sector F. A. O. ha consumido el 46,6 por 100 del propio sector, el 2,5 por 100 de productos del sector Industrial, el 0,88 por 100 de productos de piel y textil, el 0,3 por 100 de construcción, el 0,48 por 100 de energía, el 5,9 por 100 de servicios y el 43,3 por 100 de materias primas importadas, servicios del Gobierno y rentas de trabajo, de capital, etc.

premultiplicando ambos miembros por la matriz inversa de C , C^{-1} , se tiene:

$$[6] \quad C^{-1} C \cdot X = C^{-1} D \quad \delta \quad X = C^{-1} D$$

que puede expresarse en la forma:

$$[7] \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{26} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{61} & C_{62} & \dots & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_6 \end{pmatrix}$$

o sea:

$$[8] \quad \begin{aligned} X_1 &= C_{11} D_1 + C_{12} D_2 + \dots + C_{16} D_6 \\ X_2 &= C_{21} D_1 + C_{22} D_2 + \dots + C_{26} D_6 \\ &\vdots \\ X_6 &= C_{61} D_1 + C_{62} D_2 + \dots + C_{66} D_6 \end{aligned}$$

que permite determinar los niveles que debe alcanzar la producción bruta total de cada sector para una lista dada de la demanda final.

El problema de invertir la matriz C no es un problema de fácil solución práctica por los métodos ordinarios de desarrollo de determinantes, aunque se disponga de una máquina de calcular de tipo Friden o Madas, por ejemplo, ya que sus elementos son números de 5 cifras decimales y el producto de 6 de ellos es un número de 30 cifras decimales; como, por otra parte, habría que desarrollar 36 determinantes de orden 5 y uno de orden 6, desarrollando por menores complementarios cada uno de los determinantes sería necesario efectuar 1.416 productos de tres factores—cada uno de ellos con 5 cifras decimales—, 12 de dos factores y 36 divisiones, además de otro gran número de sumas y restas.

Por estas razones se ha procedido a resolver el problema empleando un método de cálculo directo, habiéndose elegido el de Crout como más abreviado. El fundamento de este método y los cálculos utilizados se exponen en el Apéndice matemático de este trabajo, y merced a dicho procedimiento se ha obtenido la matriz inversa que figura en la Tabla IV:

TABLA IV

Matriz inversa.

| Sectores | 1 Sector F. A. O. | 2 Sector Industrial | 3 Piel y textil | 4 Construcción | 5 Energía | 6 Servicios |
|----------|----------------------|------------------------|--------------------|-------------------|--------------|----------------|
| 1 | 1,909 689 | 0,196 003 | 0,393 528 | 0,105 066 | 0,073 527 | 0,177 918 |
| 2 | 0,097 168 | 1,559 843 | 0,174 032 | 0,642 756 | 0,330 195 | 0,120 763 |
| 3 | 0,023 215 | 0,018 118 | 1,263 931 | 0,009 616 | 0,006 510 | 0,013 400 |
| 4 | 0,007 796 | 0,008 156 | 0,007 508 | 1,005 356 | 0,006 486 | 0,014 985 |
| 5 | 0,016 444 | 0,057 168 | 0,024 687 | 0,034 526 | 1,055 723 | 0,032 194 |
| 6 | 0,150 958 | 0,195 569 | 0,235 007 | 0,246 168 | 0,173 693 | 1,223 162 |

Una comprobación de la exactitud de esta matriz inversa se tiene al multiplicarla por el sector columna definido por las cifras de la demanda final de la Tabla II, expresadas en millones de pesetas —lo que puede obtenerse fácilmente a partir de la Tabla I—, o sea por la matriz:

$$[9] \quad \begin{array}{l} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{array} = \begin{array}{l} 86.824,50 \\ 36.550,64 \\ 24.070,64 \\ 30.247,43 \\ 4.231,83 \\ 97.249,35 \end{array}$$

El resultado de esta operación es el que figura en la Tabla V, y el total de cada fila es la producción total —en millones de pesetas— del correspondiente sector, que coincide con el de las Tablas II o I con error menor de una unidad.

TABLA V

Producción requerida de cada sector para satisfacer la demanda final.

| Sectores | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Producción total |
|------------------------|---------|--------|--------|--------|-------|---------|------------------|
| 1. Sector F. A. O. ... | 165.807 | 7.164 | 9.472 | 3.178 | 311 | 17.302 | 203.234 |
| 2. Sector Industrial. | 8.437 | 57.013 | 4.189 | 19.442 | 1.397 | 11.744 | 102.222 |
| 3. Piel y textil | 2.016 | 662 | 30.423 | 291 | 27 | 1.303 | 34.722 |
| 4. Construcción | 677 | 298 | 181 | 30.410 | 28 | 1.457 | 33.051 |
| 5. Energía | 1.428 | 2.090 | 594 | 1.044 | 4.468 | 3.131 | 12.755 |
| 6. Servicios | 13.407 | 7.148 | 5.656 | 7.446 | 735 | 118.951 | 153.043 |

MEDIDA EN QUE DEBE VARIAR LA PRODUCCIÓN DE CADA SECTOR PARA QUE PUEDA AUMENTAR LA DEMANDA FINAL DE LOS PRODUCTOS DEL SECTOR F. A. O. EN UNA DETERMINADA PROPORCIÓN.

Se deduce fácilmente de las ecuaciones [7] y [8] que los valores

$$C_{11} D_1, C_{12} D_2 \dots C_{16} D_6$$

correspondientes a los de la primera fila de la Tabla V, representan, respectivamente, la producción del sector F. A. O. requerida para satisfacer la demanda final [9] de cada uno de los sectores; es decir: los 86.824,50 millones de productos F. A. O. absorbidos por la demanda final exigen 165.807 millones de la producción de dicho sector; los 36.550,64 millones de productos del sector Industrial adquiridos por la demanda final requieren 7.164 millones de la producción del sector F. A. O.; etc.

Para determinar en qué medida ha de variar la producción de cada sector ante una variación dada de la lista de la demanda final [9] hay que multiplicar la matriz inversa de la Tabla IV por el nuevo sector columna deducido de [9]; más concretamente, si se desea estimar la producción que ha de obtenerse de cada sector para aumentar en una determinada proporción la demanda final del sector F. A. O. —por ejemplo, en un 5 por 100, un 10 por 100, . . . , un 100 por 100—, los 86.824,50 millones se incrementarán en dicho porcentaje, y al multiplicar la nueva lista de la demanda final por la matriz inversa se obtiene cada una de las producciones pedidas.

Puede comprobarse, por este procedimiento, que para que aumente en un $k\%$ la demanda final de productos del sector F. A. O. tiene que aumentar la producción de cada sector en la siguiente proporción:

| | |
|--------------------------------|------------|
| 1. Sector F. A. O. | 0,82 $k\%$ |
| 2. Sector Industrial | 0,08 $k\%$ |
| 3. Piel y Textil | 0,06 $k\%$ |
| 4. Construcción | 0,02 $k\%$ |
| 5. Energía | 0,11 $k\%$ |
| 6. Servicios | 0,09 $k\%$ |

Estos resultados, que vienen representados —salvo el del propio sector F. A. O.— en el gráfico núm. 1, muestran la dependencia

del sector F. A. O. de cada uno de los demás sectores; para duplicar, por ejemplo, la demanda final del sector F. A. O., este sector debe aumentar su producción en un 82 por 100; para el sector de Energía tiene que aumentar su producción en un 11 por 100; el de Servicios, en un 9 por 100; el sector Industrial, en un 8 por 100; el de Piel y Textil, en un 6 por 100, y el de Construcción, en un 2 por 100.

% EN QUE DEBE AUMENTAR LA PRODUCCION DE LOS DEMAS SECTORES

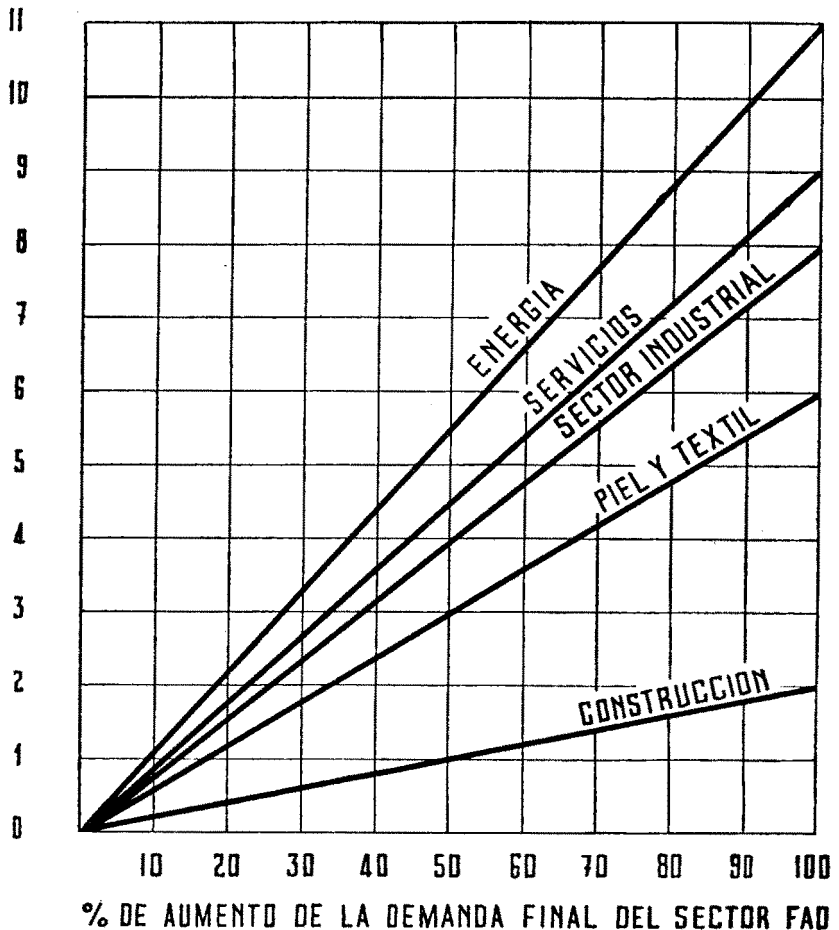


GRAFICO Nº 1

Este ejemplo muestra una posibilidad de aplicación de la Tabla *input-output* estudiada aquí, pero considero que las posibles aplicaciones deben surgir al tratar de resolver los múltiples problemas que pueden plantearse al considerar la interdependencia del sector F. A. O. con los restantes sectores de la economía nacional considerada como un todo. El objeto que me he propuesto ha sido solamente el de facilitar el estudio de las cuestiones agro-económicas mediante el empleo de esta moderna técnica del análisis *input-output*.

APENDICE MATEMATICO

Resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de Crout.

Sea el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned}
 [11] \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = k_1 \\
 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = k_2 \\
 & a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = k_3 ;
 \end{aligned}$$

dividiendo por a_{11} los dos miembros de la primera ecuación, se tiene:

$$\frac{a_{11}}{a_{11}} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \frac{k_1}{a_{11}}$$

que puede escribirse en la forma

$$[12] \quad x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 = m_1,$$

en donde

$$[13] \quad b_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad b_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}, \quad m_1 = \frac{k_1}{a_{11}}.$$

Si se multiplican los dos miembros de [12] por a_{21} y se resta miembro a miembro de la segunda ecuación de [11], se obtiene la nueva ecuación:

$$(a_{22} - a_{21} b_{12}) x_2 + (a_{23} - a_{21} b_{13}) x_3 = k_2 - a_{21} m_1$$

que puede escribirse en la forma:

$$b_{22} x_2 + (a_{23} - a_{21} b_{13}) x_3 = k_2 - a_{21} m_1$$

y dividiendo ambos miembros por b_{22} :

$$[14] \quad x_2 + b_{23} x_3 = m_2,$$

en donde

$$[15] \quad b_{22} = a_{22} - a_{21} b_{12}, \quad b_{23} = \frac{a_{23} - a_{21} b_{13}}{b_{22}}, \quad m_2 = \frac{k_2 - a_{21} m_1}{b_{22}}$$

Si se multiplican ahora los dos miembros de [12] por a_{31} y el resultado se resta miembro a miembro de la tercera ecuación de [11], se llega a la ecuación:

$$(a_{32} - a_{31} b_{12}) x_2 + (a_{33} - a_{31} b_{13}) x_3 = k_3 - a_{31} m_1$$

Y multiplicando por

$$[16] \quad b_{32} = a_{32} - a_{31} b_{12}$$

los dos miembros de [14] y restando miembro a miembro de la ecuación anterior, se tiene:

$$(a_{33} - a_{31} b_{13} - b_{32} b_{23}) x_3 = k_3 - a_{31} m_1 - b_{32} m_2,$$

de donde

$$[17] \quad x_3 = \frac{k_3 - a_{31} m_1 - b_{32} m_2}{b_{33}} = m_3,$$

tras hacer

$$[18] \quad b_{33} = a_{33} - a_{31} b_{13} - b_{32} b_{23}.$$

Después de estos resultados es inmediato deducir que

$$[19] \quad \begin{aligned} x_3 &= m_3 = u_3 \\ x_2 &= m_2 - b_{23} x_3 = m_2 - b_{23} u_3 = u_2 \\ x_1 &= m_1 - b_{12} x_2 - b_{13} x_3 = m_1 - b_{12} u_2 - b_{13} u_3 = u_1, \end{aligned}$$

siendo u_1 , u_2 y u_3 el conjunto de valores que satisface el sistema propuesto.

Es posible encontrar una comprobación de estos resultados a partir de las siguientes sumas auxiliares:

$$[20] \quad \begin{aligned} s_1 &= a_{11} + a_{12} + a_{13} + k_1 \\ s_2 &= a_{21} + a_{22} + a_{23} + k_2 \\ s_3 &= a_{31} + a_{32} + a_{33} + k_3 \end{aligned}$$

Divienddo los dos miembros de la primera igualdad por a_{11} , se tiene:

$$[21] \quad t_1 = \frac{s_1}{a_{11}} = \frac{a_{11}}{a_{11}} + \frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{a_{13}}{a_{11}} + \frac{k_1}{a_{11}} = b_{12} + b_{13} + m_1 + 1,$$

Y por analogía con la última fórmula de [15] y con la [17]:

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{s_2 - a_{21} t_1}{b_{22}} = \frac{a_{21} + a_{22} + a_{23} + k_2 - a_{21} (b_{12} + b_{13} + m_1 + 1)}{b_{22}} = \\ &= \frac{(a_{22} - a_{21} b_{12}) + (a_{23} - a_{21} b_{13}) + (k_2 - a_{21} m_1)}{b_{22}} = 1 + b_{23} + m_2 \\ t_3 &= \frac{s_3 - a_{31} t_1 - b_{32} t_2}{b_{33}} = \\ &= \frac{(a_{31} + a_{32} + a_{33} + k_3) - a_{31} (b_{12} + b_{13} + m_1 + 1) - b_{32} (1 + b_{23} + m_2)}{b_{33}} = \\ &= \frac{(a_{33} - a_{31} b_{13} - b_{32} b_{23}) + (k_3 - a_{31} m_1 - b_{32} m_2)}{b_{33}} = 1 + m_3, \end{aligned} \quad [22]$$

ya que

$$a_{32} - a_{31} b_{12} - b_{32} = 0,$$

en virtud de [16].

Si se denomina:

$$\begin{aligned} v_3 &= t_3 = 1 + m_3 = 1 + u_3 \\ [23] \quad v_2 &= t_2 - b_{23} v_3 = 1 + b_{23} + m_2 - b_{23} (1 + u_3) = 1 + (m_2 - b_{23} u_3) = 1 + u_2 \\ v_1 &= t_1 - b_{12} v_2 - b_{13} v_3 = b_{12} + b_{13} + m_1 + 1 - b_{12} (1 + u_2) - b_{13} (1 + u_3) = \\ &= 1 + (m_1 - b_{12} u_2 - b_{13} u_3) = 1 + u_1 \end{aligned}$$

se puede tener una comprobación de los resultados anteriores.

La generalización de este procedimiento a la resolución de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas es inmediata y de ella se deduce una sistematización de los cálculos anteriores, que constituye el *método de Crout* para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por cálculo numérico.

Si se considera el sistema de n ecuación con n incógnitas:

$$[24] \quad \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= k_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= k_2 \\ \vdots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= k_n \end{aligned}$$

se disponen los coeficientes y términos constantes en la Tabla VI, en donde también figura una columna de s_i , tales que

$$[25] \quad s_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} + k_i$$

TABLA VI

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| a_{11} | a_{12} | \dots | a_{1n} | k_1 | s_1 |
| a_{21} | a_{22} | \dots | a_{2n} | k_2 | s_2 |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| a_{n1} | a_{n2} | \dots | a_{nn} | k_n | s_n |

A partir de estos valores pueden obtenerse los términos de la

TABLA VII

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| a_{11} | b_{12} | b_{13} | \dots | b_{1n} | m_1 | t_1 |
| a_{21} | b_{22} | b_{23} | \dots | b_{2n} | m_2 | t_2 |
| a_{31} | b_{32} | b_{33} | \dots | b_{3n} | m_3 | t_3 |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| a_{n1} | b_{n2} | b_{n3} | \dots | b_{nn} | m_n | t_n |

en donde

$$[26] \quad b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad m_1 = \frac{k_1}{a_{11}}, \quad t_1 = \frac{s_1}{a_{11}} = \sum_{j=2}^n b_{1j} + m_1 + 1,$$

de acuerdo con las fórmulas [13] y [21];

$$[27] \quad \begin{aligned} b_{22} &= a_{22} - a_{21} b_{12} \\ b_{2j} &= \frac{a_{2j} - a_{21} b_{1j}}{b_{22}} \\ m_2 &= \frac{k_2 - a_{21} m_1}{b_{22}} \\ t_2 &= \frac{s_2 - a_{21} t_1}{b_{22}} = \sum_{j=3}^n b_{2j} + m_2 + 1 \\ b_{i2} &= a_{i2} - a_{i1} b_{12} \quad (i = 3, 4, \dots, n), \end{aligned}$$

que determinan los elementos restantes de la segunda fila y segunda columna de la Tabla VII, de acuerdo con las fórmulas [15], [22] y [16], respectivamente;

$$\begin{aligned}
 b_{33} &= a_{33} - a_{31} b_{13} - b_{32} b_{23} \\
 b_{3j} &= \frac{a_{3j} - a_{31} b_{1j} - b_{32} b_{2j}}{b_{33}} \\
 m_3 &= \frac{k_3 - a_{31} m_1 - b_{32} m_2}{b_{33}} \\
 t_3 &= \frac{s_3 - a_{31} t_1 - b_{32} t_2}{b_{33}} = \sum_{j=4}^n b_{3j} + m_3 + 1 \\
 b_{i3} &= a_{i3} - a_{i1} b_{13} - b_{i2} b_{23} \quad (i = 4, 5, \dots, n)
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

que determinan los elementos restantes de la tercera fila y tercera columna de la Tabla VII, de acuerdo con las fórmulas [18], [17] y [22] y determinadas generalizaciones.

En general, un elemento cualquiera del tipo b_{ii} , o los que quedan a su derecha —en la misma fila— o por debajo —en la misma columna de la Tabla II—, se calculan mediante las fórmulas:

$$\begin{aligned}
 b_{ii} &= a_{ii} - a_{i1} b_{1i} - b_{i2} b_{2i} - b_{i3} b_{3i} - \dots - b_{i, i-1} b_{i-1, i} \\
 b_{ij} &= \frac{a_{ij} - a_{i1} b_{1j} - b_{i2} b_{2j} - \dots - b_{i, i-1} b_{i-1, j}}{b_{ii}} \\
 m_i &= \frac{k_i - a_{i1} m_1 - b_{i2} m_2 - \dots - b_{i, i-1} m_{i-1}}{b_{ii}} \\
 t_i &= \frac{s_i - a_{i1} t_1 - b_{i2} t_2 - \dots - b_{i, i-1} t_{i-1}}{b_{ii}} = \sum_{j=i+1}^n b_{ij} + m_i + 1 \\
 b_{ji} &= a_{ji} - a_{j1} b_{1i} - b_{j2} b_{2i} - b_{j3} b_{3i} - \dots - b_{j, i-1} b_{i-1, i}.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Los valores de x_1, x_2, \dots, x_n que satisfacen el sistema [24] son los u_1, u_2, \dots, u_n de la Tabla VIII y su comprobación puede obtenerse a partir de los valores v_1, v_2, \dots, v_n .

TABLA VIII

| | | | | |
|-------|-------|-------|---------|-------|
| u_1 | u_2 | u_3 | \dots | u_n |
| v_1 | v_2 | v_3 | \dots | v_n |

De acuerdo con las fórmulas [19] y [23], se tiene:

$$\begin{aligned}
 u_n &= m_n \\
 v_n &= t_n = u_n + 1 \\
 u_{n-1} &= m_{n-1} - b_{n-1, n} u_n \\
 v_{n-1} &= t_{n-1} - b_{n-1, n} v_n = u_{n-1} + 1 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 u_i &= m_i - b_{i, i+1} u_{i+1} - b_{i, i+2} u_{i+2} - \dots - b_{i, n} u_n \\
 v_i &= t_i - b_{i, i+1} v_{i+1} - b_{i, i+2} v_{i+2} - \dots - b_{i, n} v_n = u_i + 1 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 u_1 &= m_1 - b_{12} u_2 - b_{13} u_3 - \dots - b_{1, n} u_n \\
 v_1 &= t_1 - b_{12} v_2 - b_{13} v_3 - \dots - b_{1, n} v_n = u_1 + 1
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Inversión de una matriz por el método de Crout.

Sea la matriz

$$\tag{31} \quad \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right\| = a$$

y

$$\tag{32} \quad \left\| \begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array} \right\| = A$$

su matriz inversa. En virtud de la definición de esta última, debe verificarse que

$$\tag{33} \quad a \cdot A = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} A_{11} + a_{12} A_{21} + a_{13} A_{31} \\ a_{21} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{23} A_{31} \\ a_{31} A_{11} + a_{32} A_{21} + a_{33} A_{31} \\ a_{11} A_{12} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{32} & a_{11} A_{13} + a_{12} A_{23} + a_{13} A_{33} \\ a_{21} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{32} & a_{21} A_{13} + a_{22} A_{23} + a_{23} A_{33} \\ a_{31} A_{12} + a_{32} A_{22} + a_{33} A_{32} & a_{31} A_{13} + a_{32} A_{23} + a_{33} A_{33} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \mathbf{1},$$

en donde $\mathbf{1}$ es la *matriz unidad*. La igualación, elemento a elemento, de las matrices de [33] conduce a tres sistemas de ecuaciones idénticos —salvo los segundos miembros—, al sistema [11], y cuyas incógnitas son los elementos A_{ij} de la matriz inversa [32]. Tales sistemas son:

$$\begin{aligned}
 & a_{11} A_{11} + a_{12} A_{21} + a_{13} A_{31} = 1 \\
 [34] \quad & a_{21} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{23} A_{31} = 0 \\
 & a_{31} A_{11} + a_{32} A_{21} + a_{33} A_{31} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_{11} A_{12} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{32} = 0 \\
 [35] \quad & a_{21} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{32} = 1 \\
 & a_{31} A_{12} + a_{32} A_{22} + a_{33} A_{32} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_{11} A_{13} + a_{12} A_{23} + a_{13} A_{33} = 0 \\
 [36] \quad & a_{21} A_{13} + a_{22} A_{23} + a_{23} A_{33} = 0 \\
 & a_{31} A_{13} + a_{32} A_{23} + a_{33} A_{33} = 1
 \end{aligned}$$

Cada uno de estos sistemas de ecuaciones puede resolverse por el método de Crout acabado de explicar, pero los cálculos pueden disponerse conjuntamente mediante una generalización de la Tabla VI, como ocurre en la Tabla IX, para el caso de una matriz cuadrada de orden n .

TABLA IX

| | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| a_{11} | a_{12} | \dots | a_{1n} | 1 | 0 | \dots | 0 | s_1 |
| a_{21} | a_{22} | \dots | a_{2n} | 0 | 1 | \dots | 0 | s_2 |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| a_{n1} | a_{n2} | \dots | a_{nn} | 0 | 0 | \dots | 1 | s_n |

En donde existen n columnas de términos constantes que se corresponden con los segundos miembros de los sistemas de ecuaciones del tipo [34], [35] y [36]; de esta forma el problema se reduce a resolver n sistemas de ecuaciones como el [24], en donde los coeficientes de las incógnitas son los mismos para todos los sistemas y el sector columna de los segundos miembros de cada sistema son el $(n + 1)$ -ésimo, $(n + 2)$ -ésimo, ..., $2n$ -ésimo de la Tabla IX.

Como el cálculo de los elementos b_{ij} de la Tabla VII es independiente de los términos constantes, pueden hallarse estos valores en la Tabla X por el mismo procedimiento anterior, pero habrán de obtenerse n columnas de términos m_i , con lo que dicha Tabla X tendrá n filas y $2n + 1$ columnas.

TABLA X

| | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|---------|----------|----------|----------|---------|----------|----------|
| a_{11} | b_{12} | b_{13} | \dots | b_{1n} | m_{11} | m_{21} | \dots | m_{n1} | t_1 |
| a_{21} | b_{22} | b_{23} | \dots | b_{2n} | m_{12} | m_{22} | \dots | m_{n2} | t_2 |
| a_{31} | b_{32} | b_{33} | \dots | b_{3n} | m_{13} | m_{23} | \dots | m_{n3} | t_3 |
| \vdots | | | | \vdots | \vdots | | | \vdots | \vdots |
| \vdots | | | | \vdots | \vdots | | | \vdots | \vdots |
| a_{n1} | b_{n2} | b_{n3} | \dots | b_{nn} | m_{1n} | m_{2n} | \dots | m_{nn} | t_n |

Si se designa por k_{rs} al elemento de la columna $(n+r)$ -ésima y fila s -ésima de la Tabla IX, dichos elementos toman los valores

$$k_{rr} = 1 \quad y \quad k_{rs} = 0 \quad (r \neq s)$$

y a cada columna le corresponde otra columna de valores m_{rs} en la Tabla, que por analogía con las expresiones que definen el valor de m_i en [29] vendrán dados por la fórmula:

$$m_{rs} = \frac{k_{rs} - a_{r1} m_{1s} - b_{r2} m_{2s} - b_{r3} m_{3s} - \dots - b_{r, r-1} m_{r-1, s}}{b_{rr}}$$

El cálculo de cada t_i se efectúa como en la correspondiente fórmula de [29], teniendo en cuenta la generalización conveniente.

La Tabla XI —generalización de la Tabla VIII— es la transpuesta de la matriz inversa pedida, completada con una fila de valores v_1, v_2, \dots, v_n calculada con fines de comprobación.

TABLA XI

| | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| u_{11} | u_{12} | \dots | u_{1n} |
| u_{21} | u_{22} | \dots | u_{2n} |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| u_{n1} | u_{n2} | \dots | u_{nn} |
| v_1 | v_2 | \dots | v_n |

Un término cualquiera u_{ij} , por ejemplo, tiene por expresión —por generalización de la fórmula de u_i , en [30]—:

$$u_{ij} = m_{ji} - b_{j, j+1} u_{i, j+1} - b_{j, j+2} u_{i, j+2} - \dots - b_{j, n} u_{i, n}$$

La fórmula de las v_i es la misma de [30] y su cálculo permite la comprobación de los valores calculados de las u_{ij} .

En el caso de la matriz inversa presentada en la Tabla IV, las Tablas IX y X han tomado los valores numéricos que figuran en las Tablas IX bis y X bis; la Tabla numérica correspondiente a la XI no se considera necesario publicarla, por tratarse de la matriz transpuesta de la que figura en la Tabla IV.

