

ÁNGEL M. PRIETO (\*)

JOSÉ L. ZOFÍO (\*\*)

## Modelización de los efectos de la regulación ambiental con fronteras tecnológicas DEA (\*\*\*)

### 1. INTRODUCCIÓN

Este artículo presenta las posibilidades del método de medida de eficiencia *DEA* para determinar los impactos de regulaciones ambientales sobre la eficiencia relativa de un conjunto de unidades de decisión actuando en un sector. El método, en particular, mide los costes «indirectos» de regulaciones ambientales en contraste con los desembolsos directos derivados de la inversión para su control; esto es, el coste de oportunidad de la regulación.

Los costes «indirectos» se originan cuando las regulaciones restringen el proceso de producción y causan una pérdida de eficiencia (en términos de output o productividad) respecto a las posibilidades de producción no restringida (o libre, sin control de residuos, fuerte disposición) de outputs contaminantes. Las restricciones que se imponen sobre el conjunto de posibilidades de producción permiten establecer una referencia tecnológica que recoge la producción conjunta de outputs «buenos» o deseados y outputs «malos» o no deseados.

Se asume que la regulación es el instrumento básico de Intervención Pública para el control ambiental. La necesidad de

---

(\*) Instituto de Recursos Naturales y Agrobiología de Salamanca.

(\*\*) Dpto. de Economía Aplicada e Instituto L. R. Klein. Universidad Autónoma de Madrid.

(\*\*\*) Una versión preliminar de este trabajo ha sido presentado en el II Congreso Nacional de Economía y Sociología Agraria (Valencia, 13, 14 y 15 de septiembre de 1995) bajo el título «Modelización y evaluación de fronteras tecnológicas derivadas del control de outputs no deseados» y recoge las sugerencias habidas en la sesión paralela 4: «Productividad y Eficiencia del Sector Agrario».

una norma legal viene dada porque existen características que hacen ineficiente al mercado en la gestión de los bienes públicos (incertidumbre sobre el funcionamiento de los sistemas ecológicos, desconocimiento de externalidades, dificultad de asignar valor monetario actualizado a aquellas conocidas, etc,...). Entre los instrumentos de regulación se encuentra la fijación de normas de emisión o estándares (1). Para Pearce y Turner (1995, capítulos 6 y 7) y el instrumento regulador usado habitualmente son los estándares sobre emisiones frente a los impuestos, que no son demasiados frecuentes, a pesar de demostrarse que los impuestos son una solución de menor coste que los estándares (2).

Cualquier modelo cuantitativo refleja una construcción teórica y de aquí la necesidad de centrar la discusión previa sobre el significado de la medida desde el contexto teórico que subyace a la misma. La idea básica es la de optimalidad de Pareto respecto a un conjunto de posibilidades de producción definido empíricamente, con una tecnología ex-post, por actividades de producción que operan a plena capacidad. De otro lado subyace en la medida, bajo la perspectiva neoclásica, la imposibilidad teórica de ineficiencia técnica. Pero como ya señalara Leibenstein, ello excluye otro tipo de ineficiencias que, de hecho, son mucho más significativas. Por ejemplo, la estructura de la toma de decisiones y el impacto de éstas en el ambiente económico, Leibenstein (1967):

*«Las empresas y las economías no operan en el límite de la superficie de posibilidades de producción consistente con sus recursos. De hecho trabajan en una superficie de*

---

(1) La fijación de estándares para la regulación de vertidos puede encontrarse en el RD 258/1989, de 10 de enero (normativa general sobre vertidos de sustancias peligrosas desde tierra). Orden de 31-10-1989 (normas de emisión, objetivos de calidad, métodos de medida de referencia y procedimiento de control relativos a determinadas sustancias peligrosas contenidas en los vertidos desde tierra). Orden de 28-10-1992 (amplía al ámbito de aplicación de la anterior orden a nuevas sustancias peligrosas que pueden formar parte de determinados vertidos al mar). RD 484/1995 de 7 de abril (donde se establecen medidas de regularización y control de vertidos).

(2) No vamos a entrar en este tema, puede consultarse Pearce y Turner (1995), Romero (1994) y el enfoque basado en la Economía Ecológica en Aguilera y Alcántara (1994). En este último queda explícita la imposibilidad de eliminar completamente la producción de outputs no deseados-residuos ya sea por medio de impuestos o estándares a no ser que desaparezca la propia actividad productora; de acuerdo con la segunda ley de la termodinámica ningún proceso de producción puede operar al 100 por cien de eficiencia, en términos de ausencia de residuos, pues la generación de algunos de éstos es inherente a cualquier proceso de conversión.

*producción que se halla al interior del límite. Ello significa que por varias razones la gente y las organizaciones no operan ni tan dura ni efectivamente como podrían».* (p. 413).

## 2. ESTRUCTURA ANALÍTICA DEL MODELO

Desde los primeros trabajos de investigación referidos a la aplicación del «análisis de la actividad» a la teoría de la firma, ésta se revela como una potente herramienta para la modelización de decisiones económicas. El trabajo pionero de Farrell (1957) fija los pilares de la modelización de índices de eficiencia en el contexto de decisiones Pareto-Koopmans: no son posibles reorganizaciones productivas que mejoren la eficiencia del conjunto, y ha dado lugar a su sistematización en base al análisis de las condiciones de eficiencia y regularidad respecto a diversos supuestos tecnológicos sobre el conjunto de actividades o procesos productivos (3). La modelización consiste en construir una envolvente o frontera sobre el conjunto de Unidades de Decisión UD's; es decir, restringir y/o especializar el conjunto de procesos de forma que se seleccionen los más eficientes.

### 2.1. Frontera de un conjunto de posibilidades de producción

En el contexto de los métodos no paramétricos, la frontera «mejor práctica técnica» se obtiene como una tecnología de referencia lineal, resolviendo una secuencia de  $n$  modelos de programación (PL), uno para cada UD. Charnes *et al.* (1978) generalizan las medidas de eficiencia de Farrell y formulan el método DEA (*Data Envelopment Analysis*). Éste obtiene la eficiencia relativa de cada UD evaluando su comportamiento respecto a la frontera de mejor práctica técnica.

---

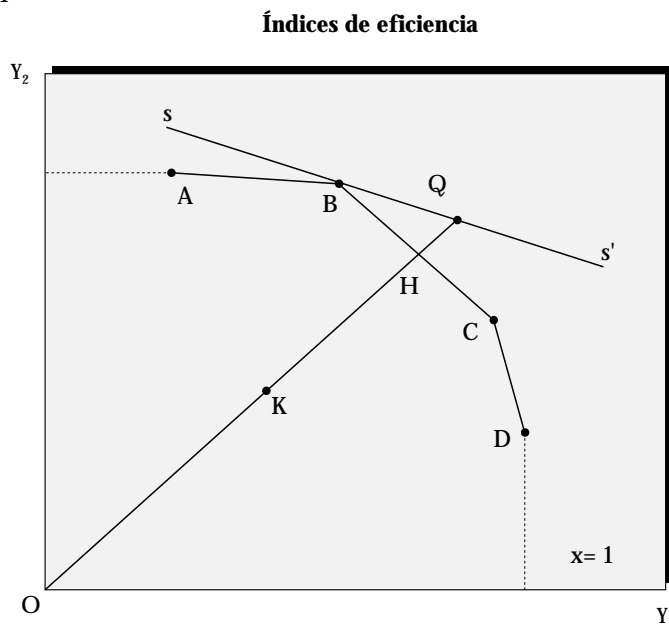
(3) En el problema de evaluar combinaciones eficientes de actividades, Koopmans (1980) destaca la posibilidad de que la contribución marginal al output de algún factor sea nulo. En esta situación la UD no es eficiente y un comportamiento racional consiste en no pagar un precio positivo por su uso.

La frontera se caracteriza en base a restricciones productivas sobre el conjunto de posibilidades de producción y las UD's se clasifican según la posición que ocupan en el mismo. Grosskopf (1986) analiza la regularidad de los índices de eficiencia respecto a diversas tecnologías (fuerte o débil disposición de recursos y rendimientos a escala variables) y Charnes *et al.* (1991) clasifican y caracterizan ineficiencias/eficiencias de la UD's, según la posición que ocupan en el conjunto (frontera eficientes Pareto-Koopmans, frontera eficientes e ineficientes no frontera).

## 2.2. Analisis gráfico de la frontera

Las medidas de eficiencia generalizadas pueden analizarse de forma gráfica. Considerando el caso de un conjunto de posibilidades de producción para un nivel de input  $x^0$ , con dos outputs  $Y_1, Y_2$  para las UD's A, B, C, D y k, cuya correspondencia aparece en el gráfico 1; podemos apreciar cómo todas las UD's menos k son eficientes en sentido técnico, al definir la

Gráfico 1



curva de transformación que representa las diversas cantidades máximas de productos generadas por  $x^0$ .

En la concepción de Farrell, la medida de eficiencia productiva general EG de la UD k, se define en términos de funciones de distancia por:

$$EG = OQ/OK \quad [1]$$

Esta medida tiene dos componentes multiplicativos: eficiencia técnica y eficiencia precio (o asignativa).

$$ET = OH/OK \quad [2]$$

$$EP = OQ/OH \quad [3]$$

De donde se deduce que

$$EG = ET * EP \quad [4]$$

Dada una combinación de productos, generados a partir de  $x^0$ , y los precios de éstos reflejados por la recta maximizadora de ingresos  $ss'$  del gráfico 1, se pueden definir de forma biunívoca los índices de eficiencia descritos (4). Centrándonos en aquel de mayor relevancia para nuestro análisis, el índice de eficiencia técnica mide el incremento necesario en las cuantías de outputs generadas para acercarse radialmente a la frontera, punto H.

### 2.3. Evaluación de las UD's

A partir del ratio propuesto por Charnes *et al.* (1978) es posible cuantificar la (in)eficiencia de las UD's según la posición que ocupan en el conjunto de posibilidades de producción. Para una determinada UD<sub>0</sub>, su índice de eficiencia se obtiene resolviendo, en términos de programación lineal, el siguiente modelo:

$$\min h_o = \frac{\sum_i v_i x_{io}}{\sum_r \mu_r y_{ro}} \quad [5]$$

(4) Una definición exhaustiva de los restantes, dentro del espacio de inputs, puede encontrarse en Prieto (1987).

s.a.

$$\frac{\sum_i v_i x_{ij}}{\sum_r \mu_r y_{rj}} \geq 1$$

$$v_i, \mu_r \geq 0$$

donde  $h_0$  representa la función objetivo para la  $UD_0$  sujeta a  $j = 1, \dots, n$  restricciones;  $v_i, \mu_r$  son las variables que determinan la solución al problema e  $y_{rj}$  supone la producción del output  $r$  a partir de los inputs  $x_{ij}$ .

Una solución representativa del anterior problema fraccional (radial orientado en outputs  $\sum_r \mu_r y_{r0} = 1$ ) origina el siguiente PL:

DUAL (DO)                      PRIMAL (PO)                      [6]

$$\min w_0 = \sum_i v_i x_{i0}$$

s.a.

$$\sum_r \mu_r y_{r0} = 1$$

$$\sum_i v_i x_{ij} - \sum_r \mu_r y_{rj} \geq 0$$

$$\mu_r, v_i \geq 0$$

$$\text{Max } \theta$$

s .a.

$$\sum_j x_{ij} \lambda_j \leq x_{i0}$$

$$-\sum_j y_{rj} \lambda_j + \theta y_{r0} \leq 0$$

$$\lambda_j \geq 0$$

La solución óptima del primal ( $\lambda^*, \theta^*$ ) implica  $\theta^* \geq 1$  debido a su segunda restricción y por las propiedades de la dualidad, en el óptimo,  $\sum_i v_i^* x_{i0} = \theta^*$ . Las UD's con  $\theta^* > 1$  son ineficientes al no definir la frontera que caracteriza a aquellas unidades que obtienen mayor cuantía de outputs dado un determinado vector de inputs.  $\theta^* = 1$  implica UD's frontera en terminología DEA, pero no necesariamente eficientes DEA en caso de que verifique holgura de recursos.

Para determinar si una unidad,  $UD_0$ , con  $\theta^* = 1$  es eficiente DEA se recurre a las propiedades de la dualidad. La solución dual obtiene el coste atribuido a los recursos: el sistema de precios sombra para los que el valor atribuido a los

outputs es máximo (5). En el óptimo,  $\mu_r^*$ ,  $v_i^*$ ,  $\lambda_j^*$  representan estos valores. Si el coste atribuido por el programa a un recurso es positivo, éste se encuentra saturado y no son posibles reorganizaciones productivas que mejoren la función objetivo.

En este sentido, caracterizar a una determinada  $UD_0$  como eficiente o ineficiente DEA equivale a verificar si el valor óptimo es la unidad ( $\sum v_i^* x_{i0} = \theta^* = 1$ ) y si los valores  $\mu_r^*$ ,  $v_i^*$ , y  $\lambda_j^*$  son positivos o nulos. Cada  $\mu_r^*$  tiene asociado en la desigualdad de outputs un valor  $s_{r0}^* \geq 0$  que representa el defecto de producto y cada  $v_i^*$  un valor  $e_{i0}^* \geq 0$  asociado al exceso de factor.  $\lambda_{j0}$  representa el nivel de actividad de la  $UD_0$  y se asocia al coste de oportunidad  $t_{j0}$  en el primal.

La asociación de los valores  $(\mu_{r0}, s_{r0})$ ,  $(v_{i0}, e_{i0})$  y  $(\lambda_{j0}, t_{j0})$  se establece a través de traducir en igualdad estricta las desigualdades del problema PL (ver Charnes *et al.* (1991) en el espacio de inputs).

$$\begin{aligned} \sum_j x_{ij} \lambda_j^* - x_{i0} &= e_{i0}^*; e_{i0}^* \geq 0 \\ -\sum_j y_{rj} \lambda_j^* + \theta y_{r0} &= s_{r0}^*; s_{r0}^* \geq 0 \\ \sum_i v_i^* x_{ij} - \sum_r \mu_r^* y_{rj} &= t_{j0}^*; t_{j0}^* \geq 0 \end{aligned} \quad [7]$$

Si  $s_{r0}^* > 0$ ,  $y_{r0}$  puede incrementar en  $s_{r0}^*$  sin que la restricción correspondiente se modifique, (ningún  $\lambda_{j0}^*$  cambia). Si  $e_{i0}^* > 0$ ,  $x_{i0}$  puede disminuir en  $e_{i0}^*$  de forma análoga.

Para que una UD sea eficiente DEA ha de satisfacer por tanto dos condiciones:

$$\begin{aligned} \theta^* &= 1 \\ s_r^* &= 0, e_i^* = 0, \lambda_j \geq 0 \end{aligned} \quad [8]$$

---

(5) La formulación de combinaciones eficientes en términos PL determina un sistema de precios que conduce a la organización óptima de la actividad (problema dual). Estos precios imputados a la organización de un recurso mide el grado ó «tensión» de uso y son más elevados cuanto mayor es su utilidad en la actividad.

En base a estas condiciones pueden establecerse seis posibles clases de UD's, representadas en el gráfico 2.

E, E' Pareto-Koopmans eficientes: UD's frontera DEA.

E DEA-extremo eficiente.

E' DEA-no extremo eficiente.

$\theta^* = 1$ ;  $s_1^* = 0$ ,  $s_2^* = 0$ ,  $e_1^* = 0$  y  $t_{E,E'} = 0$ .

F No Pareto-Koopmans eficiente pero UD frontera.

$\theta^* = 1$ ;  $s_1^* > 0$  ( $\overline{AB}$ ),  $s_2^* = 0$ ,  $e_1^* = 0$  y  $t_F = 0$ .

NF, NE, NE' Ineficientes. UD's no frontera DEA.

$\theta^* > 1$

NF  $s_1^* > 0$  ( $\overline{AB}$ ),  $s_2^* = 0$ ,  $e_1^* = 0$  y  $t_{NF} = 0$ .

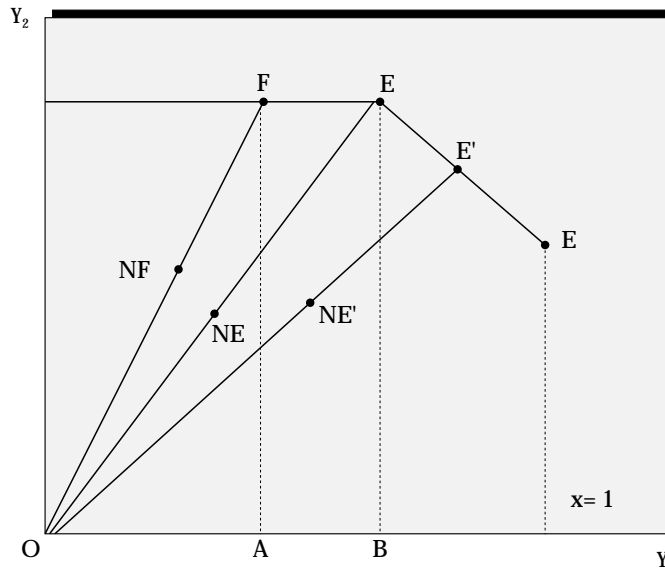
NE  $s_1^* > 0$ ,  $s_2^* = 0$ ,  $e_1^* = 0$  y  $t_{NE} = 0$ . DEA extremo.

NE'  $s_1^* > 0$ ,  $s_2^* = 0$ ,  $e_1^* = 0$  y  $t_{NE'} = 0$ . DEA no extremo.

La proyección de un punto eficiente DEA puede realizarse en dos etapas. La primera calcula  $\theta$  y  $t_j$  de PL, lo que supone clasificar las UD's como frontera eficientes o ineficientes. Los valores de  $s_r$  y  $e_i$  se obtienen en una segunda etapa, pues todavía es posible una reorganización productiva eliminando, de

Gráfico 2

UD's eficientes e ineficientes DEA





existir, el exceso de factor y/o el defecto de producto. El cálculo de esta reorganización puede realizarse a través del siguiente modelo PL:

$$\begin{aligned} \text{Max } z_0 &= \sum_r s_r + \sum_i e_i \\ \text{s. a.} \\ \sum_j y_{rj} \lambda_j - s_r &= \theta^* y_{r0} \\ \sum_j x_{ij} \lambda_j + e_i &= x_{i0} \end{aligned} \quad [9]$$

Las coordenadas de un punto frontera,  $(y_{r0}^*, x_{i0}^*)$  se obtienen de las expresiones:

$$y_{r0}^* = y_{r0} \theta^* + s_{r0}^*; \quad x_{i0}^* = x_{i0} - e_{i0}^* \quad [10]$$

### 3. CARACTERIZACIÓN DE LA FRONTERA

El conjunto de posibilidades de producción del gráfico 2 se caracteriza por los postulados de conjunto cerrado (contiene todos sus puntos frontera) y acotado (existen límites a las cantidades obtenibles de outputs). Sobre estos postulados se puede establecer un subconjunto de axiomas que nos permitan analizar el cambio en los índices de eficiencia de cada UD con respecto a dos referencias tecnológicas frontera: cambio en la disposición de recursos y cambio en la escala de operaciones.

#### 3.1. Cambio en la disposición de recursos

El axioma de fuerte disposición de outputs (no se plantean restricciones en su producción ni se alcanza un estadio de transformación saturado) se representa por la siguiente correspondencia:

$$R^F(x) = \left\{ y : x \geq Hz; y \leq Mz; z \in R_n^+ \right\} \quad [11]$$

donde:

$R^F(x)$  = conjunto de vectores de outputs obtenibles, al menos, a partir del vector de inputs  $x$ .

$y = (s * 1)$  = vector de outputs.

$x = (e * 1)$  = vector de inputs.

$M = (s * n)$  = matriz de  $s$  outputs observados para cada una de las  $n$  UD's.

$H = (e * n)$  = matriz de  $e$  inputs observados para cada una de las  $n$  UD's.

$z = (n * 1)$  = vector escalar de intensidad que forma las combinaciones convexas de los vectores de inputs y outputs observados.

Este supuesto de fuerte disposición de outputs implica que las UD's pueden intercambiar libremente los productos; no existe congestión en el proceso productivo.

El axioma de débil disposición se representa por la siguiente correspondencia:

$$R^D(x) = \left\{ y: x \geq Hz; y = Mz; z \in R_n^+ \right\} \quad [12]$$

Este supuesto supone congestión. Esta acontece cuando reducciones en la producción de un subconjunto de outputs, manteniendo constante la cuantía de los restantes, se derivan de incrementos en la cuantía de inputs.

### 3 2. Cambio en la escala de operaciones

Para analizar el impacto de los cambios en los rendimientos de la escala de operaciones sobre la eficiencia técnica, es necesario introducir en la correspondencia [11] ó [12] un parámetro de escala a través del vector de convexidad  $z$ . Este parámetro se especifica como  $I_n z_i = 1$  con lo que se introduce la posibilidad de rendimientos variables a escala, Banker *et al.* (1984).

## 4. CONDICIONES DE REGULARIDAD DE LOS ÍNDICES DE EFICIENCIA

Los tres índices de eficiencia EG, EP y ET (2.2) pueden utilizarse para establecer un test de regularidad del efecto de

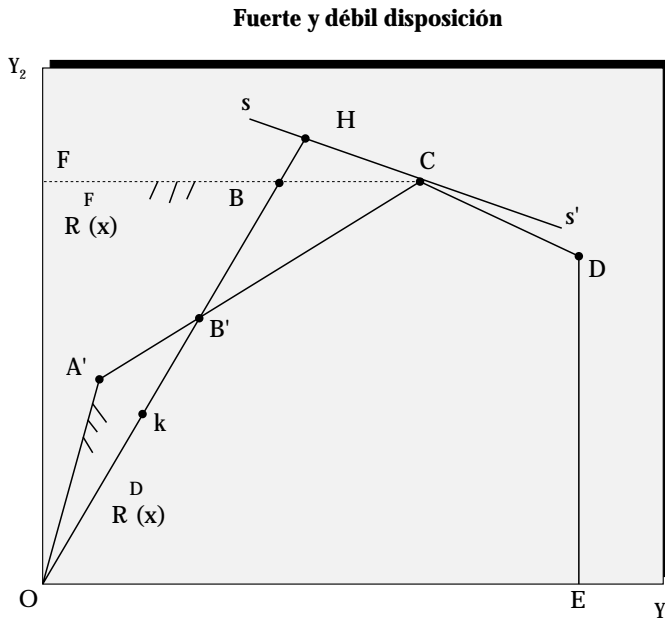
fuerte o débil disposición y rendimientos variables a escala. De forma gráfica se analiza las regularidad del índice de eficiencia técnica en el próximo apartado (6).

### 4.1. Definición de congestión: fuerte y debil disposición

En el gráfico 3 la frontera  $FBCDER^F(x)$ , implica el caso de fuerte disposición de outputs, representado por la correspondencia [11]. Ello, porque cualquier reducción de  $y_1$  ó  $y_2$  no puede ser resultado de incrementos en el vector de inputs.

La frontera  $A' B' C D E$  implica el caso de débil disposición, representado por la correspondencia [12],  $R^D(x)$ . Aquí, por ejemplo, el output  $y_1$  congestiona o restringe las posibilidades de transformación en C; en esta situación, re-

Gráfico 3



(6) Las condiciones de regularidad de los restantes índices, precio y general, son analizadas por Grosskopf (1986).

ducciones en  $y_1$  requieren disminuciones en  $y_2$  ó un incremento en los inputs utilizados (situaciones que conllevan costes en ambos casos) (7). Bajo estas premisas, ET de  $B'$ , medida respecto a la frontera débil  $R^D(x)$  es la unidad,  $ET(\text{Débil}) = 1$  ; puesto que por definición,  $ET(\text{Débil}) = OB'/OB'$ . Por el contrario, ET de  $B'$ , medida respecto a la frontera fuerte  $R^F(x)$  es mayor que la unidad,  $ET(\text{Fuerte}) > 1$ ; puesto que por definición,  $ET(\text{Fuerte}) = OB/OB'$ . Así, conceptualmente:

$$ET(\text{Débil}) \geq ET(\text{Fuerte}) \quad [13]$$

Considerando que la existencia de fuerte disposición caracteriza una tecnología no congestionada en contraposición a aquella definida por la débil, es posible definir numéricamente un índice de congestión en la forma:

$$\frac{ET(\text{Fuerte})}{ET(\text{Débil})} \geq 1 \quad [14]$$

De coincidir ambos índices, el proceso técnico de transformación de las UD's no se encontrará condicionado por la existencia de débil disposición (8).

## 4.2. Regularidad respecto a rendimientos variables

También de forma gráfica puede ilustrarse la regularidad respecto al supuesto sobre rendimientos a escala. El gráfico 4 recoge diversas cantidades de input necesarias para producir; en ella se representa los dos supuestos extremos sobre la esca-

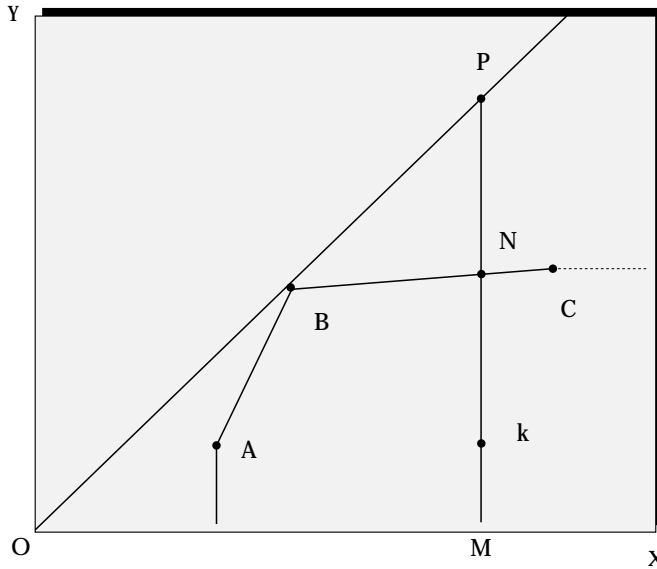
---

(7) El fenómeno de la congestión y su formulación en el espacio de inputs como una falta de fuerte disponibilidad puede verse en Färe *et al.* (1983). Esta caracterización tiene entre sus múltiples aplicaciones el control de polución, saturación de inputs en agricultura, etc...

(8) En el espacio de outputs, las magnitudes de los índices de eficiencia obtenidos son inversas al nivel de eficiencia alcanzado; así, partiendo del valor de eficiencia máximo,  $ET = 1$ , una magnitud  $ET = 1,4$  representa mayor ineficiencia que  $ET = 1,3$ . De esta forma, la relación establecida en [13] se verifica en términos conceptuales aunque en términos numéricos se presente la desigualdad inversa; en este sentido, el índice de congestión definido en [14], por estar referido a magnitudes, sí verifica la relación numérica aunque no se corresponde con la conceptual.

Gráfico 4

Regularidad respecto a rendimientos variables



la: rendimientos constantes y rendimientos no constantes (crecientes o decrecientes) (9).

La medida de eficiencia técnica de escala para la UD  $k$  es  $MP/M_k$  y compara la productividad media alcanzada por  $k$  respecto al tamaño de escala más productiva  $B$  (esta medida de escala en el contexto DEA de múltiples outputs e inputs se encuentra definida por Banker (1984)). Una medida de eficiencia técnica en output en que opera  $k$  vendría determinada por  $MN/M_k$ ; ésta es una medida que recoge la eficiencia técnica pura y que resulta de comparar la escala de  $k$  respecto a aquella eficiente,  $N$ . Es posible definir una medida adicional como combinación de ambas,  $MP/MN$ , que obtiene la divergencia entre el grado de eficiencia relativo al ta-

(9) Las dos fronteras analizadas, bajo una caracterización libre de parámetros, obtienen los índices de eficiencia más extremos entre ellas. Puede abordarse el estudio de otros supuestos sobre la escala: por ejemplo rendimientos no crecientes o crecientes a un determinado nivel, Sengupta (1989).

maño de escala real respecto a aquel más eficiente. De aquí se deduce:

$$\frac{MP}{M_k} \geq \frac{MN}{M_k} \quad [15]$$

por lo que se verifica:

$$ET(\text{Rtos. Constantes}) \leq ET(\text{Rtos. Variables}) \quad [16]$$

## 5. ÍNDICES DE EFICIENCIA CON RESTRICCIONES MEDIOAMBIENTALES SOBRE OUTPUTS NO DESEADOS

Planteadas las características de regularidad de los distintos índices de eficiencia, abordamos el efecto de las restricciones medioambientales considerando un determinado vector de inputs y uno análogo de outputs particionado en aquellos deseables y no deseables como subproductos contaminantes.

Las restricciones dictadas por la autoridad reguladora obligan a las UD's a realizar ajustes en sus procesos productivos de modo que se restrinja la cuantía de outputs no deseados. Esta acción afecta al nivel de eficiencia de las UD's al limitar el conjunto de posibilidades de producción.

### 5.1. Caracterización de la frontera con outputs no deseados

La frontera puede caracterizarse por fuerte disposición de outputs deseables y fuerte o débil en no deseables. Esta caracterización permite su tratamiento asimétrico: aumento de los primeros y reducción de los segundos. Las referencias tecnológicas derivadas de este tratamiento son análogas a las planteadas por las correspondencias [11] y [12].

El axioma de fuerte disposición de outputs (deseables y no deseables) se establece en este caso a partir de:

$$R^F(x) = \left\{ (p, q): x \geq Hz; p \leq Pz; q \leq Qz; z \in R_n^+ \right\} \quad [17]$$

donde:

$R^F(x)$  = conjunto de vectores de outputs producidos por el vector  $x$ .

$p = (c * 1)$  = vector de outputs deseados.

$q = (d * 1)$  = vector de outputs no deseados.

$P = (c * n)$  = matriz de  $c$  outputs deseados observados para cada una de las  $n$  UD's.

$Q = (d * n)$  = matriz de  $d$  outputs no deseados observados para cada una de las  $n$  UD's.

$H = (e * n)$  = matriz de  $n$  inputs observados para cada una de las  $n$  UD's.

$z = (n * 1)$  = vector de escala de intensidad que forma las combinaciones convexas de los vectores de inputs y outputs observados.

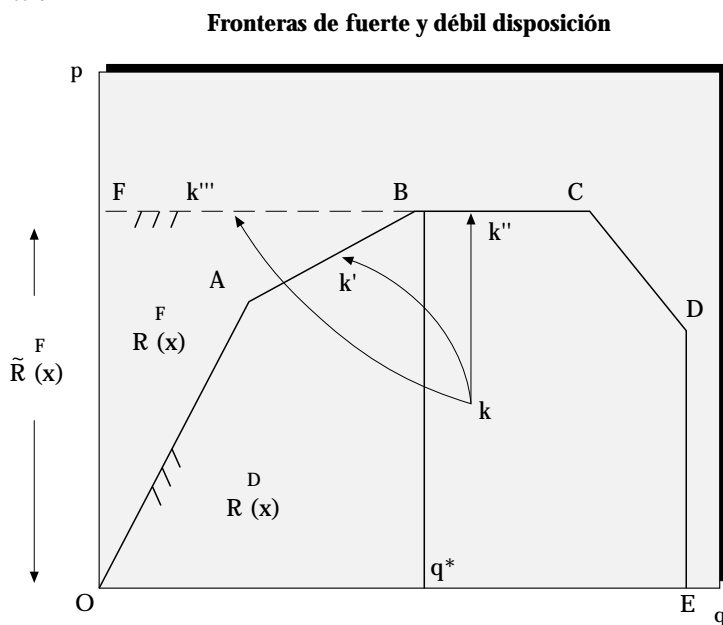
Por tanto, y respecto a las correspondencias [11] y [12], únicamente varía la matriz de outputs que ahora se define como  $M = (P, Q)$ , siendo  $P$  la submatriz de outputs deseados y  $Q$  de no deseados. Este supuesto de fuerte disposición permite alcanzar la frontera de producción sin ningún tipo de restricción ambiental.

Frente a esta caracterización, podemos considerar aquella que establece débil disposición de outputs no deseados. El axioma débil se establecería a partir de la siguiente correspondencia:

$$R^D(x) = \{(p, q): x \geq Hz; p \leq Pz; q = Qz; z \in R_n^+\} \quad [18]$$

Ambas correspondencias, [17]/[18], pueden ser analizadas gráficamente a partir del gráfico 5. Consideremos las UD's A, B, C y D que producen los vectores de outputs  $(p, q)$ . El conjunto de posibilidades de producción caracterizado por la correspondencia  $R^F(x)$ , [17], será aquél limitado por la frontera de producción eficiente OFBCDE. La correspondencia que asume débil disposición en la producción de outputs no deseados  $R^D(x)$ , [18], restringe la frontera a OABCDE. La región OABF representa el diferencial tecnológico de posibilidades de producción de fuerte frente a débil disposición de no deseados.

Gráfico 5



## 5.2. Obtención de índices de eficiencia

Partiendo de la correspondencia  $R^D(x)$ , [18], podemos definir el siguiente índice de eficiencia:

- $E_1$ : Considera la posibilidad de alcanzar la eficiencia técnica incrementando equiproporcionalmente los outputs deseados y reduciendo, de igual forma, los no deseados. La medida de eficiencia quedaría definida para cualquier observación  $k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , en la forma:

$$E_1 = (p_k, q_k, x_k) = \text{Max} \left[ \theta : (\theta p_k, \theta^{-1} q_k) \in R^D(x_k) \right] \quad [19]$$

En este caso, supongamos una observación ineficiente  $k$ ,  $\theta > 1$  situada más allá del umbral de contaminación admisible,  $q^*$ , y obligada, en su intento de alcanzar la máxima eficiencia, a reducir la cuantía producida de no deseables.  $E_1$  maximiza  $\theta$  hiperbólicamente comparando el vector de outputs observados  $(p_k, q_k)$  con el resultante de situar  $k$  en la



frontera,  $k'(\theta_{E1}p_k, q_k/\theta_{E1})$ . Dicha medida puede ser calculada resolviendo el programa lineal:

$$\begin{aligned}
 E_1(p_k, q_k, x_k) &= \theta_{E1} & [20] \\
 \text{s. a.} & \\
 \theta p_k &\leq Pz \\
 2q_k - \theta q_k &= Qz \quad (10) \\
 Hz &\leq x_k \\
 z &\in R_k^+
 \end{aligned}$$

- $E_2$ : Considera la posibilidad de incrementar los outputs deseados ignorando los no deseados y, por tanto, cualquier restricción medioambiental.

$$\begin{aligned}
 E_2(p_k, x_k) &= \text{Max} [\theta: (\theta p_k) \in \tilde{R}^F(x_k)] = \text{Max} \theta_{E2} & [21] \\
 \text{s. a.} & \\
 \theta p_k &\leq Pz \\
 Hz &\leq x_k \\
 z &\in R_k^+
 \end{aligned}$$

donde la tecnología de referencia será:

$$\tilde{R}^F(x_k) = \left\{ (p): x \geq Hz, p \leq Pz, z \in R_n^+ \right\} \quad [22]$$

$E_2$  maximiza  $\theta$  comparando el output deseado,  $p_k$ , con su frontera de referencia,  $k''(\theta_{E2}p_k)$  (11).

### 5.3. Interpretación de índices

La medida de eficiencia  $E_1$  trata de forma asimétrica los outputs deseables y no deseables. La  $E_2$  ignora los outputs no

(10) Aproximado linealmente la restricción  $\theta^{-1}q_k$  por  $2q_k - \theta q_k$ .

(11) Färe *et al.* (1989) definen medidas análogas a  $E_1$  y  $E_2$  considerando adicionalmente una reducción equiproporcional en los inputs. Dichas medidas se definen en  $R^D(\theta^{-1}x)$ , imponiendo sobre los inputs una restricción igual a la considerada en  $E_1$  para los outputs no deseados.

deseables. La comparación entre ambas permite observar el impacto de no considerar los subproductos contaminantes.

Con el fin de establecer comparaciones adicionales que permitan considerar si la existencia de restricciones ambientales condiciona el proceso productivo de una UD, así como la posible pérdida potencial de outputs deseados, definimos un índice adicional que considera fuerte disposición de outputs no deseados.

Establecemos  $E_3$  como medida análoga a  $E_1$  pero en  $R^F(x)$ :

$$E_3(p_k, q_k, x_k) = \text{Max} \left[ \theta : (\theta p_k, \theta^{-1} q_k) \in R^F(x_k) \right] = \text{Max} \theta_{E_3} \quad [23]$$

s. a.

$$\theta p_k \leq Pz$$

$$2q_k - \theta q_k \leq Qz$$

$$Hz \leq x_k$$

$$z \in R_K^+$$

$E_3$  maximiza  $\theta$  comparando el vector de outputs observados  $(p_k, q_k)$  con aquel que se define como frontera de referencia  $k'''$   $(\theta_{E_3} p_k, q_k / \theta_{E_3})$ ; o bien, por la aproximación lineal de la nota 11,  $(\theta_{E_3} p_k, 2q_k - \theta_{E_3} q_k)$ .

- 1.º El índice de congestión  $E_3/E_1$  muestra el grado en que las UD's se ven afectadas por la restricción ambiental. Si  $E_{3k}/E_{1k} = 1$ , ésta no condiciona su proceso productivo (las fronteras Fuerte y Débil coinciden) (12). Si los ratios son superiores a la unidad entonces el proceso productivo de  $k$  se ve afectado por las restricciones ambientales.
- 2.º Los índices definidos permiten, además, obtener una medida de pérdida potencial de output deseable debido a la falta de fuerte disposición de no deseados; es decir, el coste de respetar la legislación medioambien-

(12) Asimismo, la reducción de no deseados planteada permite interpretar la débil disposición de estos como aquella cuantía mínima necesaria (como subproducto) para lograr la producción observada de deseados. La traslación de una frontera de débil disposición de no deseados a una fuerte ( $E_1$  a  $E_3$ ) permite seguir reduciendo la producción de los primeros conforme se incrementan los segundos; al verificarse  $E_3/E_1 > 1$  la producción de outputs deseados va asociada obligatoriamente a una cuantía mínima de no deseados.

tal. Si definimos esta medida como  $p_k(E_{3k} - E_{1k})$  obtenemos la pérdida en términos físicos de outputs deseables por producir con débil disposición de no deseables.

Esta pérdida física puede cuantificarse en términos de ingresos a partir del vector de precios de outputs deseables  $r_p$ ; en este caso, la pérdida monetaria viene dada por:

$$\sum_{p=1}^c r_p p_k (E_{3k} - E_{1k}), \quad k = 1, \dots, n \quad [24]$$

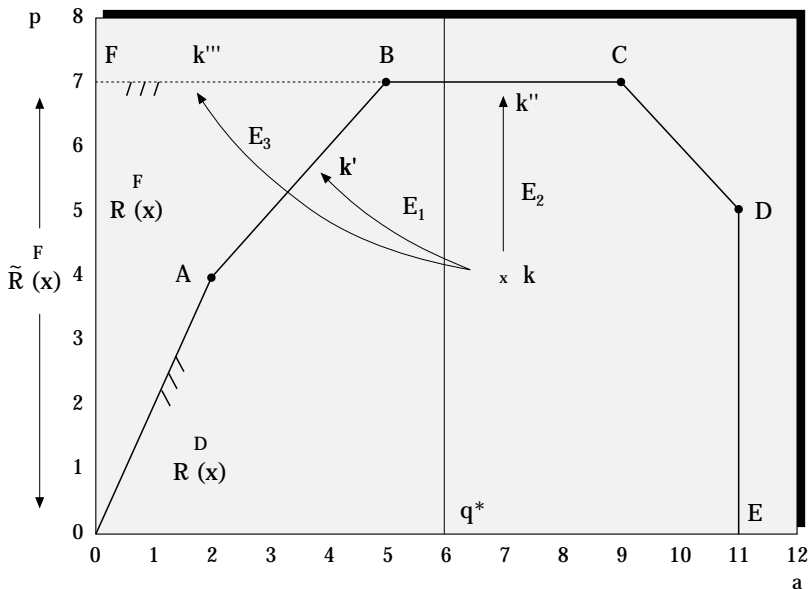
### 5.4. Ejemplo

Consideremos un conjunto de UD's, gráfico 6, caracterizado por los siguientes vectores de outputs (no deseados, deseados) y un máximo de contaminación admisible fijado en 6 unidades.

$$A = (2,4); B = (5,7); C = (9,7); D = (11,5); k = (7,4)$$

Gráfico 6

Ejemplo. Fuerte y débil disposición de outputs no deseados



Si resolvemos para la UD  $k$  los programas lineales planteados podremos estimar los índices definidos y las fronteras eficientes de referencia:

- $E_1 = \text{Max } \theta_{E1} = 1,4546$ ;  $k = (3,82, 5,82)$ .
- $E_2 = \text{Max } \theta_{E2} = 1,75$ ;  $k'' = (7)$ .
- $E_3 = \text{Max } \theta_{E3} = 1,75$ ;  $k''' = (1,75, 7)$ .

Podemos concluir de los resultados obtenidos:

- Si ignoramos los outputs no deseables se incrementa el nivel de ineficiencia de las observaciones pues su referencia frontera no se encuentra condicionada por posibles restricciones ambientales; Así  $E_2 > E_1$  (13).
- El índice de congestión  $E_3/E_1 = 1,2 > 1$  revela que la regulación ambiental esta condicionando a  $k$  (la frontera de fuerte disposición es distinta a la de débil).
- La pérdida potencial en términos físicos por existir débil disposición de no deseables es:  $4 (1,75 - 1,4546) = 1,18$  unidades. Es posible cuantificar la pérdida en ingresos multiplicando dicho resultado por el precio del output deseable.

## 6. CONCLUSIONES

La siguiente tabla, que no agota las posibilidades de definición de medidas de eficiencia, muestra la secuencia de comparaciones que se puede establecer a partir de los tres índices propuestos.

	E1	E2	E3
E1	Capacidad de $\Delta$ los outputs deseados y $\nabla$ los no deseados con débil disposición de los segundos.		
E2	Efecto sobre el nivel de eficiencia de ignorarse los outputs no deseados.	Capacidad de $\Delta$ los outputs deseados, ignorando los no deseados.	
E3	Si $E3/E1=1$ , la regulación no obligaría al productor. Si $E3/E1>1$ , la regulación reflejaría la pérdida potencial de output debido a la falta de fuerte disposición de no deseados.	Efecto sobre el nivel de eficiencia de ignorarse los outputs no deseados.	Capacidad de $\Delta$ los outputs deseados, $\nabla$ los no deseados con fuerte disposición de los segundos.

(13) De hecho, el ignorar la producción de outputs no deseados conlleva un ajuste del proceso productivo que no corrige el grado de contaminación mayor del admisible.

El objetivo del análisis planteado es definir un marco de estudio, a partir de técnicas de programación lineal, que permita evaluar el grado de rendimiento de diversas unidades productivas teniendo en cuenta sus producciones respectivas de outputs deseables y no deseables. El método otorga flexibilidad suficiente para determinar distintos índices de eficiencia según sea el planteamiento teórico. En particular la posibilidad de considerar asimétricamente outputs deseables y no deseables incluyendo u obviando la existencia de controles medioambientales impuestos por parte de la Autoridad Reguladora.

Esta asimetría permite evaluar el coste que para cualquier UD tiene el respetar la legislación medioambiental. Comparando los índices de eficiencia de débil disposición de outputs no deseables con aquellos de fuerte disposición se puede determinar el coste, en términos de pérdida potencial (física y monetaria) de outputs deseables, que experimenta una UD al verse restringida por medidas de control medioambiental. □

## BIBLIOGRAFÍA

- AGUILERA, F. y ALCÁNTARA, V. (comp.) (1994): *De la Economía Ambiental a la Economía Ecológica*. Icaria. Barcelona.
- BANKER, R. D. (1984): Estimating Most Productive Scale Size Using Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*, 17: pp. 35-45.
- BANKER, R. D.; CHARNES, A. y COOPER, W. W. (1984): Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30: pp. 1.078-92.
- CHARNES, A.; COOPER, W. W. y RHODES, E. (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*, 2: pp. 429-44.
- CHARNES, A.; COOPER, W. W. y THRALL, R. M. (1991): Classifying and Characterizing Efficiencies and Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *The Journal of Productivity Analysis*, 2: pp. 197-237.
- FÄRE, R.; GROSSKOPF, S. y LOVELL, C.; (1983): The Structure of Technical Efficiency. *Scandinavian Journal of Economics*, 85-2: pp. 181-90.

- FÄRE, R.; GROSSKOPF, S.; LOVELL, C. y PASURKA, C. (1989): Multilateral Productivity Comparisons When Some Outputs Are Undesirable; A non Parametric Approach. *The Review of Economics and Statistics*: pp. 90-98.
- FARRELL, M. J. (1957). The Measurement of Productive Efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, 120, (part III): pp. 253-89.
- GROSSKOPF, S. (1986): The Role of Reference Technology in Measuring Productive Efficiency. *The Economic Journal*, 96: pp. 499-513.
- KOOPMANS, T. C. (1980): Tres Ensayos sobre el Estado de la Ciencia Económica. Antoni Bosch. Barcelona.
- LEIBENSTEIN, W. (1967): Allocative Efficiency vs. «X-Efficiency». *American Economic Review*, 56-2: pp. 392-415.
- PEARCE, D. W. y TURNER, R. K. (1995): Economía de los Recursos Naturales y del Medio Ambiente. Colegio de Economistas de Madrid - Celeste Ediciones. Madrid.
- PRIETO, A. M. (1987): Disponibilidad de Recursos y Eficiencia Productiva. *Revista de Estudios Agrosociales*, 142: pp. 47-80.
- ROMERO, C. (1994): Economía de los Recursos Ambientales y Naturales. Alianza Economía. Madrid.
- SENGUPTA, J. K. (1989): Efficiency Analysis by Production Frontiers: the non Parametric Approach. Kluwers Academic Publishers. Dordrecht.

## RESUMEN

La imposición de regulaciones medioambientales a través de estándares con el objetivo de reducir la emisión de residuos puede resultar en un descenso de productividad si la producción de outputs deseados resulta congestionada. Este artículo se centra en la capacidad del análisis *DEA* para definir y calcular el impacto, en la forma de reducciones de outputs deseados (tanto en términos físicos como monetarios), de tales regulaciones sobre los procesos de producción. La incorporación de estándares se realiza a través de la definición de una tecnología de referencia que considera débil disposición de outputs no deseados.

*DEA* se revela como una metodología flexible en la definición de índices de eficiencia pues permite incorporar diversas tecnologías de referencia. En el artículo se presentan tres medi-

das iniciales que permiten evaluar el coste derivado de la regulación, así como un breve ejemplo que permite su ilustración.

## RÉSUMÉ

L'établissement de patrons réglementaires pour le contrôle des déchets peut aboutir à une perte d'efficacité résultant de la réduction de la production souhaitable. Dans ce rapport, il est étudié la capacité de l'Analyse globale des données pour définir et mesurer les répercussions de la réglementation sur le processus de production de tout ensemble d'Unités de prise de décision ainsi que leurs coûts indirects en ce qui concerne la perte potentielle (au niveau physique et des revenus) de la production souhaitable. Des patrons sont établis dans le modèle à travers une technologie restrictive qui prend en considération la faible disponibilité de la production non souhaitable.

L'Analyse globale des données apparaît comme un moyen flexible de calcul des indices d'efficacité selon plusieurs définitions technologiques. Il est envisagé et décrit au moyen d'un bref exemple trois mesures initiales permettant d'évaluer les coûts réglementaires particuliers des Unités de prise de décision.

## SUMMARY

Setting regulatory standards for waste control might result in productivity loss due to desirable outputs reduction. This paper focuses on Data Envelopment Analysis capability to define and measure regulatory impacts on the production processes of any Decision Making Units set as well as their indirect costs in terms of desirable outputs potential loss (physical and revenue). Standards are set in the model through a restrictive technology which considers weak disposability of non desirable outputs.

Data Envelopment Analysis reveals itself as a flexible way to measure efficiency indexes under several technological definitions. Three initial measures which allow to evaluate individual DMU's regulatory costs are established and accounted for in a brief example.

