FUNCIONES DE PRODUCCION EN JUDIAS BLANCAS Y TABLAS DE OPTIMOS ECONOMICOS(*)

Por
DIEGO PAZOS (**)

SUMARIO

1. INTRODUCCION.—2. EL MODELO BASICO: 2.1. ESTABLECIMIENTO DE LA NOTACIÓN. 2.2. ESTABLECIMIENTO DE LOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL MODELO. 2.3. ESTABLECIMIENTO DE LAS HIPÓTESIS DEL MODELO. 2.4. DEFINICIONES BÁSICAS. 2.5. CONSECUENCIAS DEL MODELO.—3. PRESENTACION DE DATOS Y AJUSTES ESTADISTICOS.—4. CONTRASTACION DEL MODELO: 4.1. CÁLCULO DE LOS MÁXIMOS TÉCNICOS. 4.2. CÁLCULO DE LAS PRODUCTIVIDADES MARGINALES. 4.3. CÁLCULO DE LAS CURVAS ISOCUANTAS. 4.4. CÁLCULO DE LOS ÓPTIMOS ECONÓMICOS. 5. DETERMINACION DE UNAS TABLAS DE OPTIMOS ECONOMICOS. 6. DETERMINACION DE LA FAMILIA DE ISOCLINAS O CURVAS EUTOPICAS (ABACOS PARA OBTENER PLANES DE PRODUCCION A COSTE MINIMO.—7. RESUMEN DE LA INVESTIGACION.—ANEJO I: DESCRIPCION DE LA EXPERIENCIA Y DE LA TECNICA DE PRODUCCION.—ANEJO II: REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA.

1. INTRODUCCION

El agrónomo Justus VON LIEBIG, en el año 1855 [50] fue el primer científico que trató de investigar la relación funcionar existente en los procesos de producción agrícolas, entre las cantidades de ciertos factores productivos (tales como semilla y abono) y la cantidad de cosecha obtenida. El trabajo de VON LIEBIG se puede considerar como pionero en el campo de las funciones de producción agrícolas, aunque él no intentara establecer la forma algebraica de dichas fun-

(*) El material contenido en este artículo, incluyendo unas tablas de óptimos económicos, se presentó como tesis doctoral en la ETS de Ingenieros Agrónomos de Madrid (Sección de Economía Agraria). Fue leída el 19 de noviembre de 1975 ante un tribunal formado por los profesores: José VERGARA (presidente), Enrique BALLESTERO, Arturo CAMILLERI, Manuel GARCÍA-NIETO y Carlos ROMERO (director de la tesis), obteniendo la calificación de sobresaliente "Cum Laude".

(**) Doctor Ingeniero Agrónomo, profesor encargado de curso de Economía de la Empresa en la ETS de Ingenieros Agrónomos de la Universidad Politécnica de Madrid

ciones. MITSCHERLICH, en 1909 [55], fue quizá el primer investigador que propuso la forma algebraica de una función de producción que trataba de explicar la relación existente entre el nivel de abonado y la cosecha obtenida. Independientemente del trabajo desarrollado por MITSCHERLICH, en el año 1923 SPILLMAN [66] propuso una forma de función de producción parecida a la de MITSCHERLICH.

Los trabajos realizados por los investigadores citados anteriormente en el primer cuarto de siglo tuvieron una importancia indudable. No obstante, al intentar sacar provecho práctico a estos trabajos se presentaban dos problemas importantes. Por una parte, no existían métodos depurados que permitieran determinar cuantitativamente a partir de datos experimentales las funciones de producción, ni existían tampoco métodos científicos que permitieran efectuar un análisis económico de dichas funciones de producción.

El segundo problema fue el primero en resolverse, pues en la segunda mitad de los años 30 la teoría económica experimentó un impulso muy fuerte desarrollando modelos teóricos muy completos que explicaban con precisión la teoría de la producción. Así tenemos los trabajos de SCHNEIDER en 1934 [65], de HICKS en 1939 [44, apéndices a los capítulos VI y VII], de CARLSON, asimismo, en 1939 [14] y de SAMUELSON en 1947 [64, capítulo IV] (*). Todos estos modelos permiten efectuar un análisis económico completo de las funciones de producción. En cuanto al problema de la determinación de las funciones de producción, quedó solucionado con el fuerte impulso experimentado por los métodos econométricos y por la aparición de los ordenadores electrónicos.

Por tanto, a partir de los años 40, aproximadamente, se ha dispuesto de todo el bagaje teórico necesario para trabajar en teoría de la producción. Sin embargo, ha existido un notable desfase entre la construcción de modelos teóricos de producción y la aplicación de estos modelos, como señala CHENERY en su importante trabajo [15] publicado en 1949. Tal vez la razón de este desfase se deba a los diferentes conocimientos que son necesarios aunar en un trabajo referente a funciones de producción. Así, por ejemplo, para trabajar con funciones de producción agrícolas es necesario realizar una síntesis de conocimientos relacionados con la teoría económica, la econometría y la fitotecnia. Esta labor de síntesis se realizó a principios de los años

(*) El trabajo de SAMUELSON fue publicado en 1947, pero había sido presentado en 1940 como tesis doctoral en la Universidad de Harvard con el título "The Operational Significance of Economic Theory", luego se puede considerar contemporáneo de los trabajos de SCHNEIDER, HICKS y CARLSON.

50 en la Universidad de Iowa. Un equipo de profesores de esta Universidad, dirigidos por HEADY, determinaron por métodos econométricos las primeras funciones de producción agrarias, efectuando asimismo su correspondiente análisis económico. En el año 1957, HEADY publicó en la revista «Econometrica» un artículo bajo el título «An Econometric Investigation of the Technology of Agricultural Production Function», que se puede considerar fundamental. En este artículo se resumen las investigaciones sobre funciones de producción realizadas en la Universidad de Iowa en el período citado anteriormente.

Desde esa fecha, la determinación experimental de funciones de producción agrarias, así como el tratamiento económico de dichas funciones ha constituido un importante tema de investigación en la mayor parte de los países desarrollados. Una relación de estos trabajos se puede encontrar en la bibliografía (véase Anejo II).

Por el contrario, en España esta línea de investigación en economía agraria apenas ha sido iniciada. Creemos que la primera función de producción ajustada en nuestro país se realizó en el año 1969, por un equipo de trabajo dirigido por el profesor BALLESTERO en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Valencia [6, páginas 409-26]. Dichos investigadores, utilizando unos datos experimentales publicados por una casa comercial, determinaron una función de producción para el maíz híbrido variedad Dekalb 624. Posteriormente, la doctora FERNÁNDEZ-BLANCO presentó una tesis doctoral en el año 1973 en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Complutense de Madrid [26], en la que utilizando datos de experiencias publicadas por el Instituto Nacional de Investigaciones Agrarias determinaba unas funciones de producción para la remolacha, así como una tabla de siembras y abonados óptimos para dicho cultivo.

* * *

Los objetivos perseguidos con esta investigación son:

1.° Obtener unos datos experimentales referentes a producciones de judía blanca variedad Monquilisa para diferentes niveles de semilla y de superfosfato dentro de una determinada técnica de producción.

2.° A partir de los datos experimentales anteriores, determinar las mejores funciones de producción para dicha variedad de judía blanca, dentro de la técnica de producción definida anteriormente. Creemos que estas funciones serán las primeras determinadas experimentalmente en España.

3.° Efectuar un análisis técnico-económico de las anteriores funciones de producción, determinando: máximos técnicos, productividad marginales y mapas de curvas isocuantas.
4.° Construir unas tablas que permitan al agricultor determinar las dosis óptimas de semilla y de superfosfato para unos precios conocidos de dichos factores y para un precio esperado del producto.Entenderemos por dosis óptimas aquellas que proporcionan al agricultor el margen máximo (ingreso menos costes variables).
5.° Construir unos ábacos de planes de producción a coste mínimo. Estos ábacos indican al agricultor las cantidades de semilla y superfosfato que se debe emplear para conseguir un objetivo dado de producción a coste mínimo, para cualquier estructura de precios de los factores de producción.

2. EL MODELO BASICO

En este apartado vamos a establecer un modelo general que explique, a nivel microeconómico, las funciones de producción en agricultura. Las diferentes fases necesarias para construir el modelo son:

2.1. ESTABLECIMIENTO DE LA NOTACIÓN

La notación que utilizaremos en este modelo es la siguiente:

V_i = cantidades de los factores de producción variables

$(i = 1, 2, \ldots, n)$

Q_j = cantidades de los factores paramétricos $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

C_K = parámetros representativos de las calidades de todos los factores $(k = 1, 2, \ldots, n + m)$.

k = parámetro representativo de la organización del proceso de producción.

x = cantidad de producto.

P_x = precio de la unidad de producto.

P_i = precio de los factores de producción variables

$(i = 1, 2, \ldots, n)$

C_F = costes fijos del proceso de producción.

C_T = coste total del proceso de producción.

B = beneficio empresarial.

$\bar{x}_i$ = productividad media del i-ésimo factor variable de producción (i = 1, 2, ..., n).

x'_i = productividad marginal del i-ésimo factor variable de producción (i = 1, 2, ..., n).

f_i = derivada de la función de producción respecto al factor de producción variable i-ésimo (i = 1, 2, ..., n).

f_{ih} = derivada cruzada de la función de producción respecto a los factores de producción variables i-ésimo y h-ésimo

(i, h = 1, ..., n)

2.2. Establecimiento de los conceptos fundamentales del modelo

Un *proceso de producción* consiste en la transformación de unos bienes y unos servicios (factores de producción) en otros bienes y en otros servicios (productos). Cuando empleando diversos factores de producción se obtiene un solo producto se dice que la *producción es simple.*

La función de producción simple es una relación que liga la cantidad de producto obtenido con las cantidades de los factores de producción variables empleados, siendo dadas: las cantidades de los factores paramétricos, las calidades de estos factores y de los factores variables de producción, así como la organización del proceso productivo. Según esto, la función de producción simple puede expresarse por medio de la siguiente ecuación [6, pág. 74]:

$$x = f(V_1, V_2 \ldots V_i \ldots V_n/Q_1, Q_2 \ldots Q_j \ldots Q_m, C_1, C_2 \ldots C_{m+n}, k) \quad [1]$$

La expresión [1] puede leerse de la siguiente manera:

Existe una relación funcional f entre las cantidades de producto x y las cantidades $V_1 \ldots V_i \ldots V_n$ de factores de producción variables siempre que se mantenga la *técnica constante.* Es decir, que mantengan constantes: las cantidades de los factores paramétricos $Q_1 \ldots Q_j \ldots Q_m$, las calidades de todos factores $C_1 \ldots C_{m+n}$, así como la organización del proceso productivo.

Los factores paramétricos $Q_1, \ldots, Q_j, \ldots, Q_m$ son factores de producción que no aparecen explícitos en la función f, pero que influyen en el proceso. Cuando cambian las cantidades de estos factores se produce un cambio en la técnica alterándose la forma de la función de producción. Un cambio en la técnica puede producirse también por una alteración en la calidad de los factores o en la organización del proceso productivo.

2.3. Establecimiento de las hipótesis del modelo

Hipótesis H1

El proceso de producción es simple. Es decir, la función de producción es como la representada en la expresión [1].

En rigor, los procesos de producción en agricultura no corresponden a un esquema de producción simple. Así, por ejemplo, empleando varios factores de producción variables abono, semilla, mano de obra, etcétera, obtenemos varios productos (trigo, paja y rastrojeras). Es decir, en principio la producción de trigo se adapta a un esquema de producción conjunta. No obstante, la mayor parte de los procesos de producción conjunta que se presentan en la agricultura se pueden reducir a esquemas de producción acoplada. Según Ballestero [6, pág. 146], producción acoplada «es una clase particular de producción conjunta que se caracteriza por el hecho de ser prácticamente fijas e invariables las proporciones de los productos obtenidos en ella». A efectos de su estudio la producción acoplada puede reducirse sin dificultad a la producción simple. Por tanto, creemos que esta *hipótesis H1* no es demasiado restrictiva, por lo que el modelo no se aleja de la realidad ni pierde utilidad con vistas a las aplicaciones prácticas.

Hipótesis H2

Existe una relación causal de tipo continuo entre los factores de producción y la cantidad de producto. Es decir, la función de producción simple es continua. Matemáticamente, esta hipótesis puede expresarse diciendo que la derivada primera de la función de producción existe, o sea:

$$\exists\, f_i \qquad \forall_i, \quad i \in \{1 \;\dots\; n\} \tag{2}$$

Hipótesis H3

El aumento de la producción es menos que proporcional al aumento del factor. Es decir, existen rendimientos decrecientes para cada factor de producción. Matemáticamente, esta hipótesis puede expresarse diciendo que la derivada segunda de la función de producción es menor que cero (condición de concavidad), o sea:

$$f_{ii} < 0 \qquad \forall_i, \quad i \in \{1 \;\dots\; n\} \tag{3}$$

Hipótesis H4

Un incremento proporcional de todos los factores de producción genera un incremento menos que proporcional de la cantidad de producto. Es decir, el proceso de producción es no homotético [6, página 115].

Hipótesis H5

Los factores de producción variables son sustituibles o sustituibles limitativos.

Se dice que los factores de producción variables son sustitutibles cuando aumentando las cantidades de unos y disminuyendo las de otros se sigue obteniendo la misma cantidad de producto (por ejemplo, el abono nitrogenado y el agua de riego son factores sustituibles en la producción del maíz). Cuando un factor de producción variable es sustituible pero sólo hasta cierto punto, se dice que es sustituible limitativo (por ejemplo, el abono y la semilla son sustituibles limitativos).

2.4. Definiciones básicas

Definición I. Productividad media de un factor variable de producción

Se entiende por *productividad media del factor variable de producción* i-ésimo la cantidad de producto obtenido por unidad de factor i-ésimo empleado. Esta definición puede expresarse matemáticamente de la siguiente manera:

$$\bar{x}_i = \frac{x}{V_i} \qquad \forall i, \quad i \in \{1 \ldots n\} \qquad [4]$$

Definición II. Productividad marginal de un factor variable de producción

Se entiende por *productividad marginal* del factor variable de producción i-ésimo el incremento de la cantidad del producto resultante al aumentar la cantidad del factor i-ésimo en una unidad. Esta definición puede expresarse matemáticamente de la siguiente manera:

$$x_i' = f_i \qquad \forall i \quad i \in \{1 \ldots n\} \qquad [5]$$

Según la hipótesis H3, las productividades marginales son decrecientes.

Definición III. Plan de producción

Se entiende por plan de producción un vector cuyas componentes nos indican las cantidades de cada uno de los factores variables de producción. Dada la relación funcional [1], a cada plan de producción le corresponde una determinada cantidad de producto.

Definición IV. Máximo técnico

Conforme vayamos aumentando las cantidades de los factores variables de producción, la cantidad de producto irá aumentando hasta llegar a un cierto límite (según las *hipótesis H3* y *H4*), pasando este límite nuevos incrementos de los factores variables de producción generarán una disminución en la cantidad de producto. A ese límite, que representa la producción máxima posible, se le llama *máximo técnico*. Para la función de producción [1] el máximo técnico nos lo dará el plan de producción que obtengamos al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{c} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_i = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n = 0 \end{array} \qquad [6]$$

Es decir, según la definición II, el máximo técnico se obtiene con el plan de producción en el que las productividades marginales son iguales a cero.

Definición V. Curvas de isoproducto o isocuantas

Se entiende por *curva de isoproducto o isocuanta* el lugar geométrico de los puntos de igual producción. La isocuanta correspondiente a un cierto nivel de producción x_0 será igual a:

$$x_0 = f(V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots, V_n) \qquad [7]$$

Por razones de brevedad, en lo sucesivo, al escribir una función de producción no expresaremos explícitamente la técnica del proceso de producción (cantidades de los factores paramétricos, calidades de todos los factores y organización del proceso productivo).

Definición VI. Isoclinas o curvas eutópicas

Se llaman isoclinas o curvas eutópicas al lugar geométrico de las cantidades de los factores de producción variables que permiten obtener las diferentes cantidades de producto a coste mínimo para unos precios dados de dichos factores de producción.

2.5. CONSECUENCIAS DEL MODELO

En esta fase vamos a deducir dos teoremas y un corolario coherentes con el conjunto de hipótesis y definiciones que acabamos de establecer. Con la ayuda de estos teoremas, un determinado centro decisor podrá elegir de una manera racional el plan de producción a seguir.

Teorema I

La combinación óptima de factores (mínimo coste) se consigue cuando se verifica la igualdad entre las productividades marginales de cada factor multiplicadas por las inversas de sus precios.

Prueba

El coste total de proceso de producción es:

$$C_T = P_1V_1 + \ldots P_iV_i + \ldots P_nV_n + C_F \qquad [8]$$

El objetivo es producir la cantidad x_0 a coste mínimo. Por tanto, hemos de minimizar la expresión [8] sujeta a la condición:

$$x_0 = f(V_1 \ldots V_i \ldots V_n) \qquad [9]$$

Vamos a resolver este problema de mínimos condicionales aplicando el método de LAGRANGE; tenemos:

$$\emptyset = P_1V_1 + \ldots P_iV_i + C_F + \lambda\,[f(V_1 \ldots V_i \ldots V_n) - x_0] \qquad [10]$$

Derivando parcialmente [10] respecto a $V_1 \ldots V_i \ldots V_n$ tenemos:

$$\begin{aligned} \emptyset_1 &= P_1 + \lambda\, f_1 = 0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \emptyset_i &= P_i + \lambda\, f_i = 0 \qquad [11] \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \emptyset_n &= P_n + \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

donde $\emptyset_i$ es la derivada parcial de [10] respecto a V_i.

Eliminando λ en el sistema de ecuaciones [11], se obtiene:

$$\frac{1}{P_1} f_1 = \ldots \frac{1}{P_i} f_i = \ldots \frac{1}{P_n} f_n \qquad [12]$$

La expresión [12] representa la condición necesaria o condición de primer orden para que se cumpla el teorema I. A partir de las *hipótesis H3* y *H4* se puede demostrar la condición de suficiencia o condición de segundo orden [28, págs. 162-67; 49, págs. 44-47]. Asimismo, según la definición VI la expresión [12] representa la ecuación de la familia de isoclinas de parámetros $P_1 \ldots P_i \ldots P_n$.

Corolario

El plan de producción que nos permite obtener una cierta cantidad de producto x_0 a coste mínimo se obtiene resolviendo el sistema de n ecuaciones dado por las expresiones [9] y [12].

Teorema II

El plan de producción que proporciona al empresario un beneficio máximo (óptimo económico) se obtiene cuando la productividad marginal de cada factor es igual al precio del factor dividido por el precio del producto.

Prueba

El beneficio empresarial es igual a los ingresos generados por el proceso de producción menos los costes de dicho proceso. Es decir:

$$B = P_x f(V_1 \ldots V_i \ldots V_n) - V_1 P_1 \ldots V_i P_i \ldots V_n P_n - C_F \qquad [13]$$

Derivando parcialmente [13] respecto a $V_1 \ldots V_i \ldots V_n$ tenemos:

$$\begin{aligned} B_1 &= P_x f_1 - P_1 = 0 \\ B_i &= P_x f_i - P_i = 0 \\ B_n &= P_x f_n - P_n = 0 \end{aligned} \qquad [14]$$

donde B_i es la derivada parcial de [13] respecto a V_i.

Del sistema de ecuaciones [14] se deduce fácilmente que:

$$P_x = \frac{P_1}{f_1} = \ldots \frac{P_i}{f_i} = \ldots \frac{P_n}{f_n} \qquad [15]$$

La expresión [15] representa la condición necesaria o condición de primer orden para que se cumpla el teorema II. Igual que ocurría con el teorema I a partir de las *hipótesis H3* y *H4* se puede demostrar la condición de suficiencia o condición de segundo orden [28, páginas 199-201; 49, págs. 53-54].

3. PRESENTACION DE DATOS Y AJUSTES ESTADISTICOS

En este apartado se determinan las funciones de producción de judía blanca, variedad Moquilisa, en la localidad de Tiriez (Albacete). Los factores de producción variables elegidos han sido la semilla (V_1) y el abono fosfórico en forma de superfosfato con una riqueza del 18 por 100 en P_2O_5 (V_2), por considerar que son los dos factores que influyen más significativamente en la producción de judía blanca. Las experiencias de campo se realizaron en el período junio-noviembre de 1974 en la citada localidad de Tiriez. Las características de la experiencia de campo figuran detalladas en el apartado 7, Anejo I. En dicho apartado se especifican, entre otras cosas, las cantidades de los factores paramétricos, las calidades de todos los factores y la organización del proceso productivo (es decir, la técnica de producción seguida).

Los resultados de la experiencia figuran reflejadas en el cuadro I. La interpretación de este cuadro es sencilla, ya que las filas indican las diferentes dosis de superfosfato y las columnas las diferentes dosis de semilla. Así, por ejemplo, el elemento correspondiente a la tercera fila y a la segunda columna de dicho cuadro significa que con una dosis de 444 Kg. de superfosfato y 167 Kg. de semilla se obtuvo una producción de 998 Kg. de judía blanca por Ha.

Una vez que disponemos de los datos del cuadro I, hay que elegir la forma de la función a ajustar, La experiencia demuestra que las funciones teóricas que mejor explican los procesos de producción agrarios, para el caso de dos factores de producción, son las siguientes [6, pág. 405; 40, págs. 73-107]:

Función cuadrática:

$$x = a + bV_1 + cV_2 + dV_1^2 + eV_2^2 + hV_1V_2 \qquad [16]$$

Función raíz cuadrada:

$$x = a + bV_1 + cV_2 + d\sqrt{V_1} + e\sqrt{V_2} + h\sqrt{V_1V_2} \qquad [17]$$

Función tres medios:

$$x = a\,bV_1 + cV_2 + dV_1^{3/2} + eV_2^{3/2} + hV_1V_2 \qquad [18]$$

Función potencial:

$$x = aV_1^bV_2^c \qquad [19]$$

Cuadro núm. 1

OBSERVACIONES EXPERIMENTALES

Kg. superfosfato/Ha. \ Kg. semilla/Ha.	55	167	277	388	500
0	498	569	853	872	858
222	402	596	907	902	860
444	700	998	1.061	917	684
666	610	796	1.124	1.035	978
888	562	732	1.061	872	694
1.111	520	754	768	856	555

Con vistas a las aplicaciones prácticas la función potencial o función de COBB-DOUGLAS dada por [19] presenta el defecto de carecer de máximo técnico. Para comprobarlo nos basta con derivar [19] con respecto a V_1 y a V_2 e igualar a cero dichas derivadas:

$$\begin{aligned} f_1 &= a \cdot bV_1^{b-1} \cdot V_2^{c} = 0 \\ f_2 &= a \cdot cV_1^{b} \cdot V_2^{c-1} = 0 \end{aligned} \qquad [20]$$

Como se puede comprobar fácilmente, los únicos valores finitos de V_1 y V_2 que satisfacen [20] son $V_1 = 0$ y $V_2 = 0$. Por lo que la función [19] carece de máximo técnico. Por tanto, si se utiliza la expresión [19] como función de producción, dicha función perderá validez para valores de V_1 y V_2 que se aproximen a los que proporcionan la máxima producción posible de x.

A partir de los datos del cuadro I, se ha procedido a realizar el ajuste mínimo cuadrático de las cuatro funciones teóricas anteriormente definidas. Los ajustes estadísticos se realizaron en el ordenador IBM modelo 1130 del Instituto Nacional de Investigaciones Agrarias. A continuación efectuamos el análisis estadístico de las cuatro funciones ajustadas.

Función cuadrática

Ajustando, por mínimos cuadrados, los datos del cuadro 1 a la expresión [16] obtenemos :

$$\begin{aligned} x = 202{,}1839 &+ \underset{(0{,}5543)}{3{,}7336\, V_1} + \underset{(0{,}2003)}{0{,}7304\, V_2} - \underset{(0{,}0009)}{0{,}0052\, V_1^2} \\ &- \underset{(0{,}0002)}{0{,}0005\, V_2^2} - \underset{(0{,}0003)}{0{,}0006\, V_1V_2} \end{aligned} \qquad [21]$$

Los números entre paréntesis debajo de cada coeficiente de regresión indican la desviación típica de dicho coeficiente.

Para estudiar la bondad del ajuste conviene tener en cuenta:

a) El coeficiente de determinación ρ^2 es igual a 0,854.

b) Los coeficientes de regresión correspondientes a las variables V_1 y V^2 resultan significantes al 1 por 1.000, las correspondientes a las variables V_2 y V_2^2 al 1 por 100 y el correspondiente a la variable V_1V_2 al 10 por 100.

c) Contrastada la significatividad de toda la ecuación mediante la Fe de Snedecor, ésta resulta significativa al 1 por 1.000.

Función raíz cuadrada

Ajustando, por mínimos cuadrados, los datos del cuadro I a la expresión [17], obtenemos:

$$
\begin{aligned}
X = 443{,}2721 &- \underset{(0{,}9891)}{3{,}6317}\, V_1 - \underset{(0{,}2118)}{0{,}3839}\, V_2 + \underset{(38{,}8249)}{137{,}3482}\sqrt{V_1} + \\
&+ \underset{(9{,}7636)}{22{,}2480}\sqrt{V_2} + \underset{(0{,}4065)}{0{,}5512}\sqrt{V_1V_2}
\end{aligned}
$$

Para estudiar la bondad del ajuste conviene tener en cuenta:

a) El coeficiente de determinación ρ^2 es igual a 0,773.

b) Los coeficientes de regresión correspondientes a las variables V_1 y V_2 resultan significativas al 1 por 1.000, los correspondientes a las variables $\sqrt{V_1}$ y $\sqrt{V_2}$, al 10 por 100, y el correspondiente a la variable $\sqrt{V_1V_2}$, al 20 por 100.

c) Contrastada la significancia de toda la ecuación mediante la F de Snedecor, ésta resulta significativa al 1 por 1.000.

Función tres medios

Ajustando mínimas cuadradas, los datos del cuadro I a la expresión [18] obtenemos:

$$
\begin{aligned}
X = 142{,}0856 &+ \underset{(1{,}0121)}{6{,}0432}\, V_1 + \underset{(0{,}3264)}{1{,}0716}\, V_2 - \underset{(0{,}0405)}{0{,}2133}\, V_1^{3/2} - \\
&- 0{,}0271\, V_2^{3/2} - \underset{(0{,}0003)}{0{,}0006}\, V_1V_2
\end{aligned}
$$

Para estudiar la bondad del ajuste conviene tener en cuenta:

a) El coeficiente de determinación ρ^2 es igual a 0,837.

b) Los coeficientes de regresión a las variables V_1 y $V_1^{3/2}$ resultan significativas al 1 por 1.000 y las correspondientes a las variables V_2, $V_2^{3/2}$ y V_1V_2, al 1 por 100.

c) Contrastada la significatividad de toda la ecuación mediante la F de Snedecor, ésta resulta significativa al 1 por 100.

Función potencial

Para ajustar por mínimos cuadrados la función potencial deberemos, en primer lugar, linealizar dicha función. De esta manera la expresión [19] se convierte en:

$$\log x = \log a + b \log V_1 + c \log V_2 \qquad [24]$$

Ajustando por mínimos cuadrados los datos del cuadro I a la expresión [24], obtenemos:

$$\log x = 2{,}4217 + \underset{(0{,}0453)}{0{,}1916} \log V_1 + \underset{(0{,}0108)}{0{,}0074} \log V_2 \qquad [25]$$

Para estudiar la bondad del ajuste conviene tener en cuenta:

a) El coeficiente de determinación ρ^2 es igual a 0,636.

b) El coeficiente de regresión correspondiente a la variable $\log V_1$ resulta significativo al 1 por 1.000 y el correspondiente a la variable $\log V_2$, al 50 por 100.

c) Contrastada la significatividad de toda la ecuación mediante la F de Snedecor, ésta resulta significativa al 1 por 1.000.

* * *

Del análisis estadístico que hemos efectuado en este apartado se desprenden las siguientes conclusiones:

a) La función de COBB-DOUGLASS [25] resulta significativa al 1 por 1.000, siendo el valor de su coeficiente de determinación bastante aceptable (0,036). El coeficiente de regresión correspondiente a la variable V_1 resulta significativo al 1 por 1.000, pero el correspondiente a la variable V_2 resulta significativo sólo al 50 por 100.

b) La función raíz cuadrada [22] resulta significativa al 1 por 1.000, siendo el valor de su coeficiente de determinación elevado (0,773). Los coeficientes de regresión correspondientes a las variables V_1 y $\sqrt{V_1}$ resultan significativos al 1 por 1.000, los correspondientes a las variables V_2 y $\sqrt{V_2}$ resultan significativos al 10 por 100 y el correspondiente a la variable $\sqrt{V_1 V_2}$ resulta significativo al 20 por 100.

c) Las funciones cuadrática [21] y tres medios [23] resultan significativas al 1 por 1.000, siendo el valor de sus coeficientes de correlación muy elevados (0,854 y 0,837, respectivamente). Los coeficientes de regresión de ambas funciones resultan significativas al 1 por 1.000 o al 1 por 100.

Por tanto, las funciones empíricas que mejor explican el fenómeno estudiado son la función cuadrática y la función tres medios, dadas por las expresiones [21] y [23]. Dichas funciones vienen representadas en las figuras 1 y 2. A continuación vamos a contrastar el modelo teórico desarrollado en el apartado 2 para las funciones empíricas cuadrática y tres medios dadas por las expresiones [21] y [23].

Nota complementaria al apartado 3

A lo largo de este apartado hemos utilizado como método de estimación de los coeficientes de las funciones de producción los mínimos cuadrados ordinarios. Para que las estimaciones mínimo-cuadráticas obtenidas sean las «mejores» (consistentes, insesgadas y de varianza mínima) es necesario que las perturbaciones aleatorias no estén autocorrelacionadas.

Para medir las consecuencias de la autocorrelación es necesario considerar dos casos:

a) En el segundo miembro de la ecuación existen variables endógenas retardadas. En tal caso las estimaciones mínimo-cuadráticas no son consistentes, ni insesgadas, así como tampoco de varianza mínima.

b) El segundo miembro de la ecuación está formado únicamente por variables exógenas. En tal caso, las estimaciones mínimo-cuadráticas son consistentes e insesgadas, pero no son de varianza mínima.

El caso *b)* es el que se presenta en nuestra investigación. Afortunadamente este caso no es demasiado grave, pues en el supuesto de que las perturbaciones aleatorias estuvieran autocorrelacionadas, el único problema que se nos plantearía sería el haber obtenido unas conclusiones demasiado optimistas en cuanto a la significabilidad de los coeficientes de regresión.

No obstante, vamos a contrastar la posible autocorrelación de las perturbaciones aleatorias en la función cuadrática [21] y tres medios [23]. La prueba estadística clásica para contrastar la autocorrelación es la de Durbin-Watson [73]. Para la función cuadrática el valor del estadístico es 1,56 y para la función tres medios 1,42. Según

FIGURA I.

FUNCION CUADRATICA

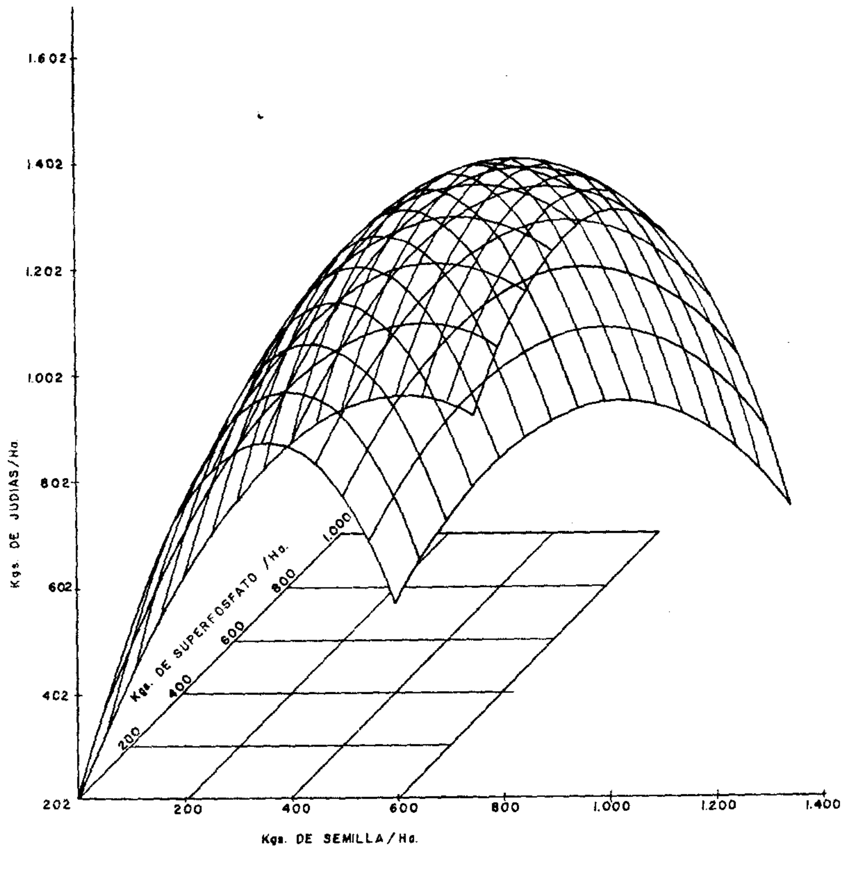
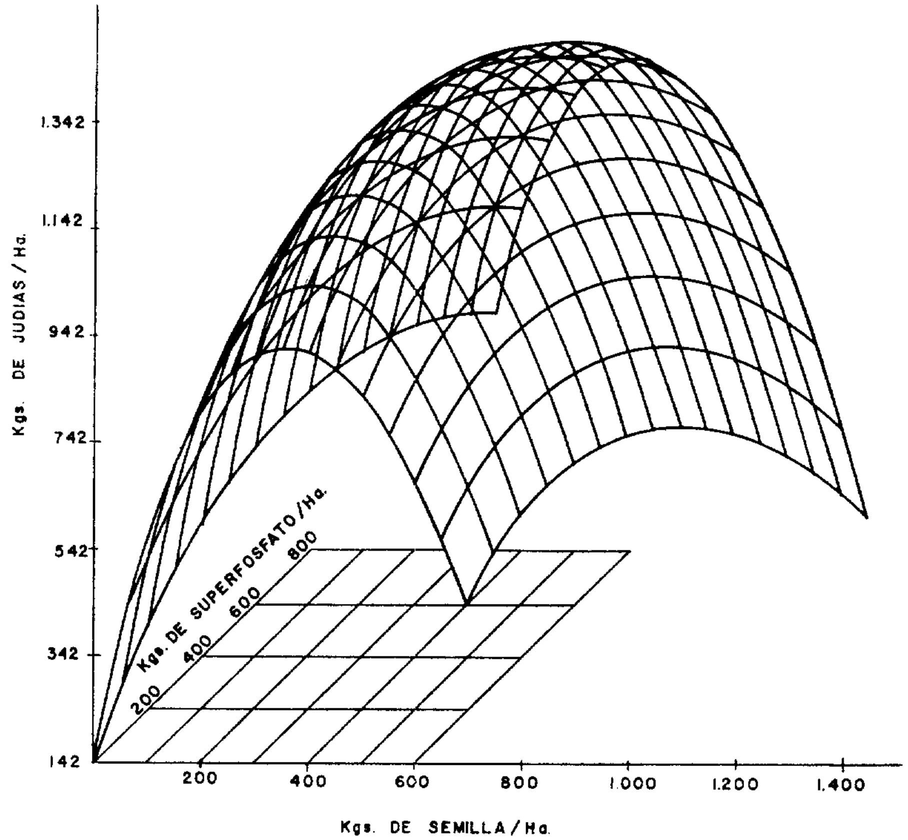


FIGURA 2. FUNCION TRES MEDIOS



las tablas elaboradas por Durbin y Watson a un nivel de significación del 1 por 100 le corresponde un intervalo [d_L, d_U] de [0,88, 1,61]. Por tanto, en ambos casos el test resulta no concluyente pero muy próximo a la frontera de no significabilidad. Teniendo en cuenta esta circunstancia, así como la alta significabilidad de los coeficientes de las funciones [21] y [23] podemos aceptar como buenas las estimaciones mínimo-cuadráticos obtenidas en este apartado para dichas funciones de producción.

4. CONTRASTACION DEL MODELO (*)

En este apartado vamos a contrastar el modelo teórico desarrollado en el apartado dos para las funciones de producción cuadrática y tres medios dadas por las expresiones [21] y [23].

4.1. Cálculo de los máximos técnicos

Para calcular el máximo técnico en el caso de función cuadrática derivamos [21] con respecto a V_1 y V_2, sustituyendo en [6] dichas derivadas. De esta manera obtenemos:

$$f_1 = 3{,}7336 - 0{,}0104\ V_1 - 0{,}0006\ V_2 = 0 \qquad [26]$$

$$f_2 = 0{,}7304 - 0{,}0010\ V_2 - 0{,}0006\ V_1 = 0 \qquad [27]$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones [26] y [27] obtenemos el plan de producción correspondiente a la máxima producción posible (máximo técnico), dicho plan de producción es:

$V_1 =$ 328 Kg. de semilla/Ha.

$V_2 =$ 533 Kg. de superfosfato/Ha.

Sustituyendo los valores anteriores de V_1 y V_2 en [21] obtenemos el máximo técnico, que es:

x = 1.152 Kg. de judías/Ha.

Procediendo de una manera similar para el caso de la función tres medios, obtenemos:

$$f_1 = 6{,}0432 - 0{,}3199\ V_1^{1/2} - 0{,}0006\ V_2 = 0 \qquad [28]$$

$$f_2 = 1{,}0716 - 0{,}0406\ V_2^{1/2} - 0{,}0006\ V_1 = 0 \qquad [29]$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones [28] y [29] obtenemos el plan de producción correspondiente al máximo técnico. Dicho plan de producción y dicho máximo técnico son:

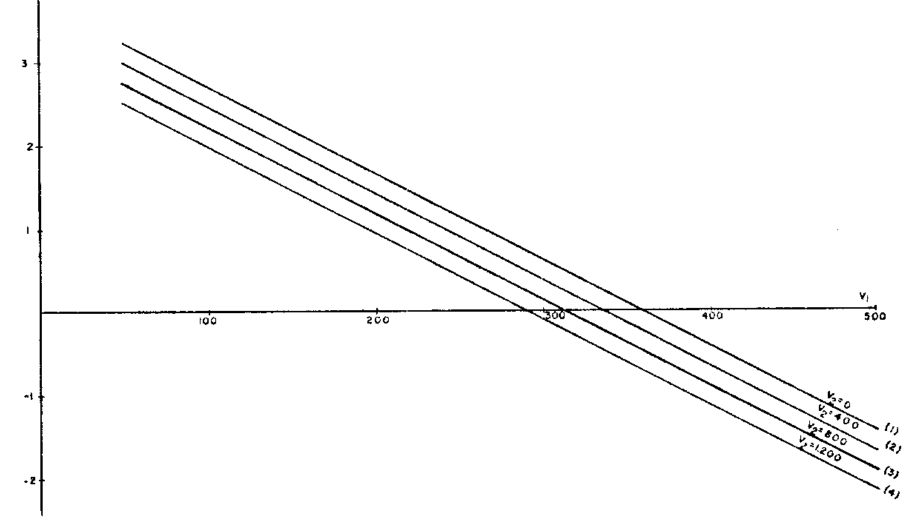
$V_1 =$ 325 Kg. de semilla/Ha.
$V_2 =$ 464 Kg. de abono/Ha.
x = 992 Kg. de judía/Ha.

(*) Nuestro agradecimiento a los profesores Luis Torres y César Pasamón, del gabinete de cálculo de la ETS de Ingenieros Agrónomos de Madrid por la ayuda prestada en la realización de los cálculos numéricos contenidos en este apartado, así como en el apartado 6.

4.2. Cálculo de las productividades marginales

En la figura 3 se representa la familia de productividad marginales de la densidad de siembra V_1 (Kg. de semilla/Ha) para la *función cuadrática* dada por [21]. Los niveles de abono varían de 0 a 1.200 Kg/Ha. Dichas productividades marginales son siempre decrecientes (verificación de la *hipótesis H3* del modelo teórico). Es interesante observar que para dosis de semilla inferior a 290 Kg/Ha. las productividades marginales son siempre positivas para cualquier dosis de superfosfato comprendida entre 0 y 1.200 Kg/Ha. Es decir, aumentando ladosis de semilla desde 50 hasta 290 Kg. obtenemos incrementos positivos de producto para cualquier dosis de abono menor que 1.200 kilogramos.

FIGURA 3. PRODUCTIVIDAD MARGINAL DE LA SEMILLA (FUNCION CUADRATICA)



En la figura 4 se representa la familia de productividad marginales del factor abono V_2 (Kg. de superfosfato/Ha.) para la *función de producción cuadrática* dada por [21]. Los niveles de semilla varían de 50 a 500 Kg. Dichas productividades marginales son siempre decrecientes (*hipótesis H3*). Es interesante observar que para dosis de superfosfato inferiores a 425 Kg. las productividades marginales son siempre positivas para cualquier dosis de semilla comprendida entre 50 y 500 Kg/Ha., es decir, aumentando la dosis de abono desde 0 has-

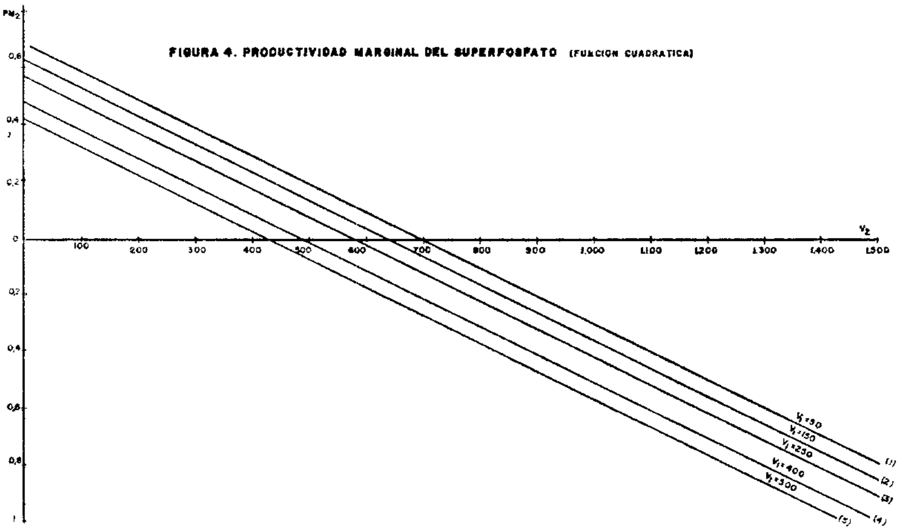


FIGURA 4. PRODUCTIVIDAD MARGINAL DEL SUPERFOSFATO (FUNCION CUADRATICA)

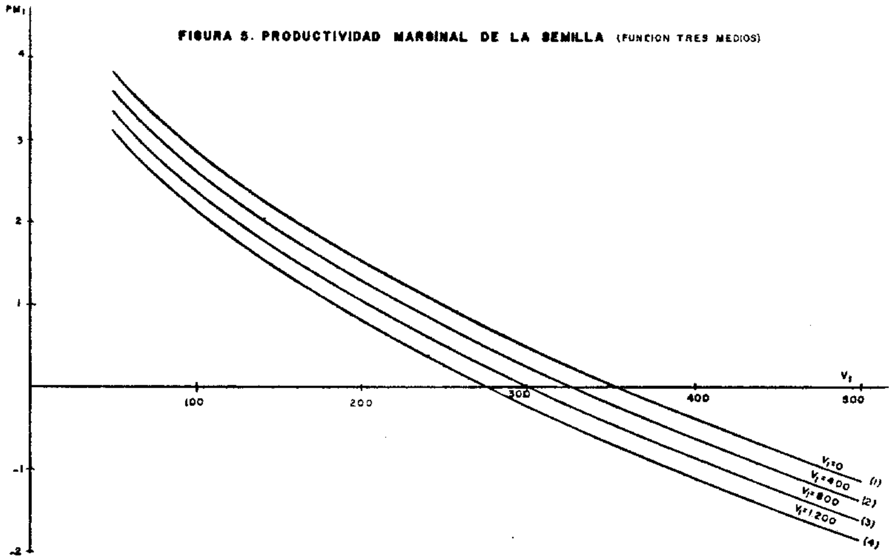


FIGURA 5. PRODUCTIVIDAD MARGINAL DE LA SEMILLA (FUNCION TRES MEDIOS)

ta 425 Kg. obtenemos incrementos positivos de producto para cualquier dosis de semilla menor que 500 Kg.

En la figura 5 se representa la familia de productividades marginales de la densidad de siembra V_1 (Kg. de semilla/Ha.) para la *función tres medios* dada por [23]. El campo de variación del abono es el mismo que el de la función cuadrática. Dichas productividades marginales son siempre decrecientes (*hipótesis H3*). Es interesante observar que para dosis de semilla inferiores a 275 Kg/Ha. las productividades marginales son siempre positivas para cualquier dosis de superfosfato comprendida entre 0 y 1.200 Kg/Ha., es decir, aumentando la dosis de semilla desde 50 hasta 290 Kg. obtenemos incrementos positivos de producto para cualquier dosis de abono menor que 1.200 Kg.

En la figura 6 se representa la familia de productividades marginales del factor abono V_2 (Kg. de superfosfato/Ha.) para la *función de producción tres medios* dada por [23]. Los niveles de semilla varían

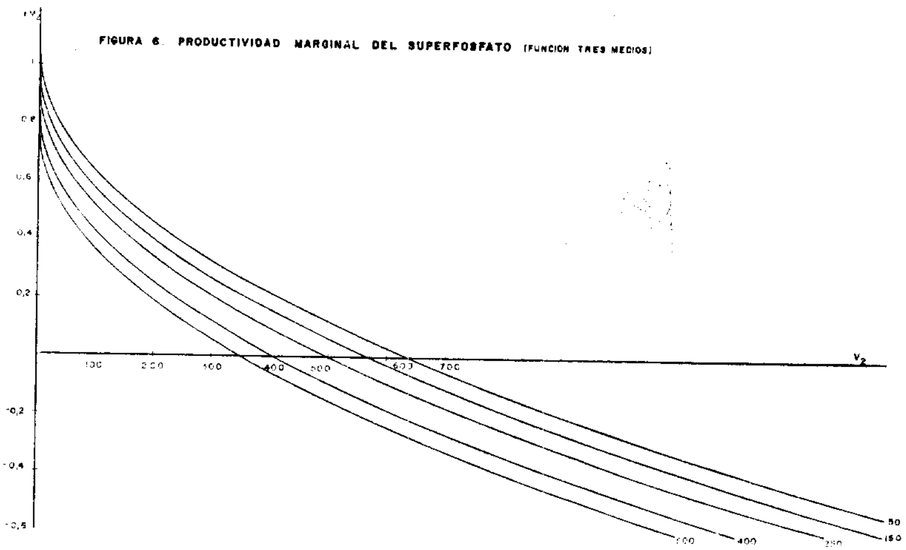


FIGURA 6. PRODUCTIVIDAD MARGINAL DEL SUPERFOSFATO (FUNCION TRES MEDIOS)

de 50 a 500 Kg. Dichas productividades marginales son siempre decrecientes (*hipótesis H3*). Es interesante observar que para dosis de superfosfato inferiores a 350 Kg. las productividades marginales son siempre positivas para cualquier dosis de semilla comprendida entre 50 y 500 Kg/Ha., es decir, aumentando la dosis de abono desde 0 hasta 425 Kg. obtenemos incrementos positivos de producto para cualquier dosis de semilla menor que 500 Kg.

4.3. Cálculo de las curvas isocuantas

En el caso de la función de producción cuadrática la familia de curvas isocuantas la obtenemos sustituyendo en [7] la función f por la expresión [21], de esta manera obtenemos:

$$x_0 = 202{,}1839 + 3{,}7336\, V_1 + 0{,}7304\, V_2 - 0{,}0052\, V_1^2 -$$
$$- 0{,}0005\, V_2^2 - 0{,}0006\, V_1V_2 \qquad [30]$$

La familia de curvas isocuantas dada por [30] vienen representadas en la figura 7. Las cantidades x_0 varían de 300 a 900 Kg., con intervalos de 100 Kg.

En el caso de la función de producción tres medios, la familia de curvas isocuantas la obtenemos sustituyendo en [7] la función f por la expresión [23], de esta manera obtenemos:

$$x_0 = 142{,}0856 + 6{,}0432\, V_1 + 1{,}0716\, V_2 - 0{,}2133\, V_1^{3/2} -$$
$$- 0{,}0271\, V_2^{3/2} - 0{,}0006\, V_1V_2 \qquad [31]$$

La familia de las curvas isocuantas dada por [32] vienen representadas en la figura 8. Las cantidades x_0 varían asimismo de 300 a 900 Kg., con intervalos de 100 Kg.

Para ambas funciones de producción las curvas isocuantas han resultado convexas hacia el origen, lo cual sirve de verificación de la *hipótesis H3.*

4.4. Cálculo de los óptimos económicos

Amparándonos en el teorema II, expresión [15], vamos a calcular el plan de producción que proporciona al empresario el máximo beneficio (óptimo económico) para una estructura dada de precios en las funciones de producción cuadrática y tres medios.

Supongamos la siguiente estructura de precios:

$P_x = 41$ ptas/Kg. de judía blanca
$P_1 = 50$ ptas/Kg. de semilla
$P_2 = 5$ ptas/Kg. de superfosfato (18 % en P_2O_5)

Para calcular el óptimo económico de la función cuadrática nos bastará con sustituir en [14] P_x, P_1 y P_2 por los precios dados anteriormente, f_1 y f_2 por las derivadas de [21] con respecto a V_1 y V_2; de esta manera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0{,}4264\ V_1 + 0{,}0246\ V_2 = 103{,}0776 \qquad [32]$$
$$0{,}0246\ V_1 + 0{,}041\ V_2 = 24{,}9464 \qquad [33]$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones [32] y [33] obtenemos el plan de producción que proporciona al empresario el máximo beneficio, dicho plan de producción es:

$V_1 = 216$ Kg. de semilla/Ha.
$V_2 = 472$ Kg. de superfosfato/Ha.

Sustituyendo estos valores de V_1 y V_2 en [21] obtenemos la producción correspondiente al óptimo económico, que es:

$x = 938$ Kg. de judías/Ha.

El beneficio que obtiene el empresario con el plan de producción óptimo lo obtenemos sustituyendo en [13] P_x, P_1, P_2, V_1, V_2 y x por las cantidades anteriores, de esta manera obtenemos:

$$B = 25.294 - CF \qquad [35]$$

Es decir, en el óptimo económico de la función cuadrática, el empresario obtiene un margen bruto de 25.294 pesetas por hectárea.

FIGURA 7. CURVAS ISOCUANTAS (FUNCION CUADRATICA)

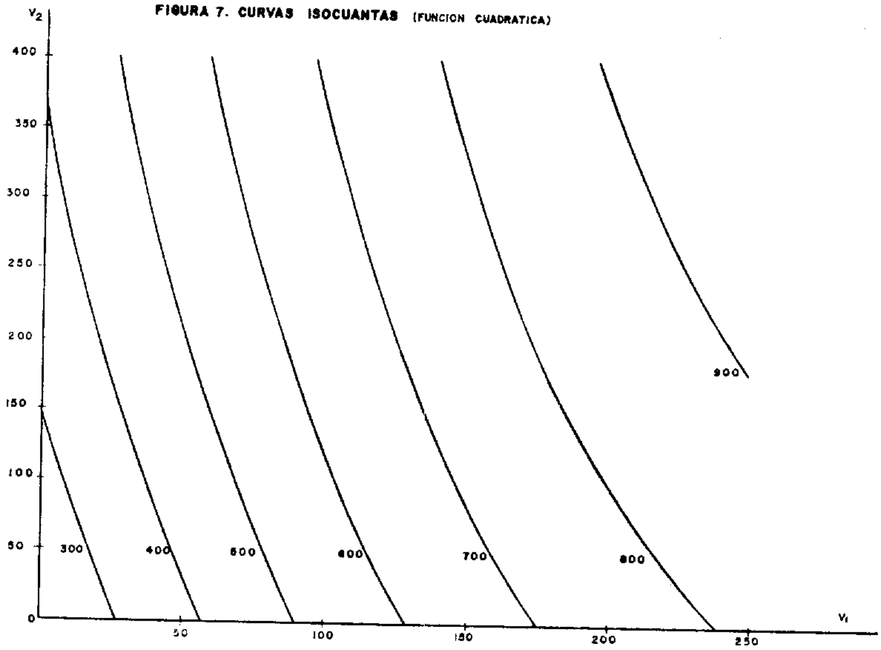
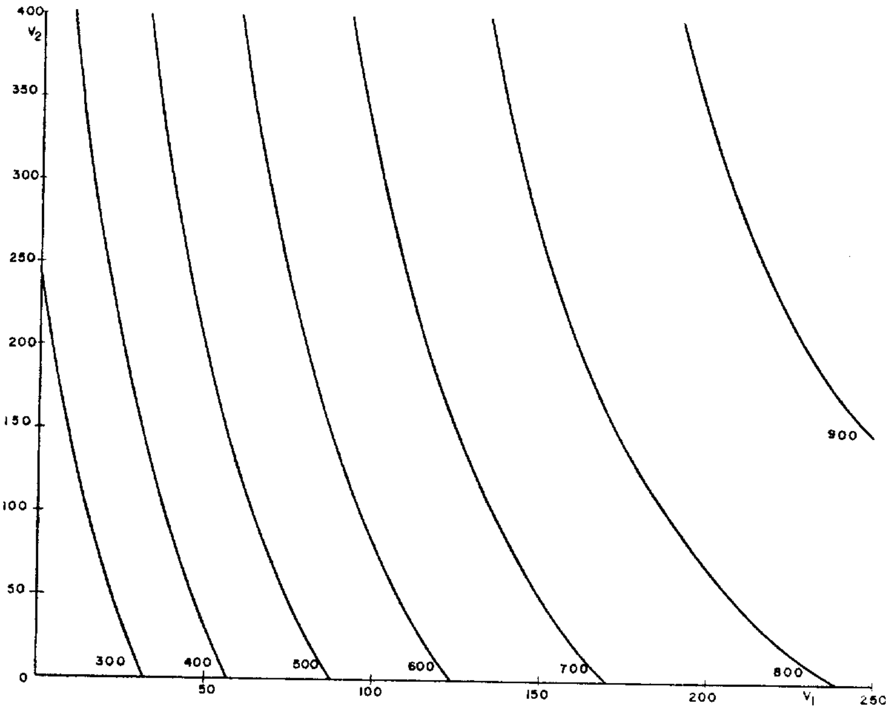


FIGURA 8. CURVAS ISOCUANTAS (FUNCION TRES MEDIOS)



Para calcular el óptimo económico de la función tres medios operaríamos de igual forma que con la función cuadrática, con la única diferencia de que sustituiríamos en [14] f_1 y f_2 por las derivadas de [23] con respecto a V_1 y V_2, de esta manera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$13{,}1159\, V_1^{1/2} + 0{,}0246\, V_2 = 197{,}771 \qquad [35]$$

$$0{,}0246\, V_1 + 1{,}6646\, V_2^{1/2} = 38{,}9356 \qquad [36]$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones [35] y [36] obtenemos el plan de producción que proporciona al empresario el máximo beneficio, dicho plan de producción es:

$V_1 = 204{,}83$ Kg. de semilla/Ha.

$V_2 = 414{,}46$ Kg. de superfosfato/Ha.

Sustituyendo estos valores de V_1 y V_2 en [23] obtenemos la producción correspondiente al óptimo económico, que es:

$$x = 919{,}6 \text{ Kg. de judías/Ha.}$$

El beneficio que obtiene el empresario, con el plan de producción óptimo, lo obtenemos sustituyendo en [13] P_x, P_1, P_2, V_1, V_2 y x por las cantidades anteriores, de esta manera obtenemos:

$$B = 25.392 - CF \qquad [37]$$

Es decir, en el óptimo económico de la función tres medios, el empresario obtiene un margen bruto de 25.392 pesetas por hectárea.

Como el beneficio dado por la ecuación [34] es del mismo orden al beneficio dado por la ecuación [37], podemos afirmar que para la estructura de precios estudiada, el óptimo económico generado por la función de producción cuadrática es del mismo orden al generado por la función tres medios.

5. DETERMINACION DE UNAS TABLAS DE OPTIMOS ECONOMICOS (*)

En el apartado anterior se han obtenido los óptimos económicos de las funciones de producción cuadrática y tres medios para una estructura de precios dada. Para esa estructura de precios hemos determinado las dosis de semilla y de superfosfato que poroporcionan al cultivador un beneficio máximo. Ahora bien, basta que cambie el precio del producto o de alguno de los factores para que cambien las dosis óptimas de semilla y de superfosfato. Por tanto, para que el estudio de óptimos económicos tenga utilidad práctica, deberemos efectuar un estudio paramétrico de dichos óptimos económicos, dejando los precios como parámetro.

Tabla de óptimos económicos para la función cuadrática

Para calcular la familia de óptimos económicos de la función cuadrática de acuerdo con el teorema II, nos bastará con sustituir en [14] f_1 y f_2 por las derivadas de [21] con respecto a V_1 y V_2, dejando P_x, P_1 y P_2 como parámetros. De esta manera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

(*) Nuestro agradecimiento a Javier MORO, Antonio CARCELLER y Mariano JAQUOTOT, del centro de procesamiento de datos del INIA, por la preparación del programa que ha permitido calcular las tablas de óptimos económicos contenidas en este apartado.

$$3{,}7336 - 0{,}0104\, V_1 - 0{,}0006\, V_2 = P_1/P_x \qquad [38]$$
$$0{,}7304 - 0{,}0010\, V_2 - 0{,}0006\, V_1 = P_2/P_x \qquad [39]$$

Para cada terna de valores de P_x, P_1 y P_2 obtenemos un óptimo económico distinto. El sistema de ecuaciones paramétricas formado por [38] y [39] se ha resuelto en el ordenador IBM modelo 1130 del Instituto Nacional de Investigaciones Agrarias para el siguiente campo de variación de los precios:

$$35 \leq P_x \leq 55 \qquad \Delta P_x = 2$$
$$40 \leq P_1 \leq 66 \qquad \Delta P_1 = 2$$
$$3 \leq P_2 \leq 7 \qquad \Delta P_2 = 0{,}5$$

Es decir, el sistema de ecuaciones anteriores se ha resuelto para 11 precios del producto, para 14 precios de semilla y para 9 precios de superfosfato. Por tanto, hemos obtenido 1.386 ($11 \times 14 \times 9$) planes de producción distintos. Todos los planes de producción vienen recogidos en la Tabla I (*). La interpretación de esta tabla es sencilla. Las tres primeras columnas indican el precio del producto, de la semilla y del abono, respectivamente. Las columnas cuarta y quinta, las dosis óptimas de semilla y abono. Las columnas sexta y séptima, la cantidad de producto y el margen correspondiente al plan óptimo de producción.

El manejo de esta tabla es también muy sencillo. Así, por ejemplo, si el precio de la semilla es de 46 ptas/Kg., el precio del superfosfato, de 5,50 ptas/Kg., y el precio esperado de la judía, de 39 ptas/Kg., la fila correspondiente de la tabla I nos indica que las dosis óptimas de semilla y superfosfato, la producción y el margen correspondiente a dichas dosis óptimas para la estructura de precios anterior es:

V_1 = 220,91 Kg. de semilla/Ha.
V_2 = 449,93 Kg. de superfosfato/Ha.
x = 940,88 Kg. de judías/Ha.
m = 24.057,90 ptas/Ha.

En la tabla I las dosis óptimas de semilla, superfosfato y la cantidad de producto obtenido con estas dosis presenta la siguiente variación:

(*) La totalidad de la Tabla I, así como la Tabla II, correspondiente a la función tres medios, no se ha incluido en este artículo. Una versión completa de estas tablas puede obtenerse en la Cátedra de Economía de la Empresa de la ETS de Ingenieros Agrónomos de Madrid. En este artículo se ha incluido exclusivamente las páginas correspondientes a los ejemplos que se utilizan para ilustrar el manejo de dichas tablas.

$147,22 < V_1 < 265,25$ Kg. de semilla/Ha.
$338,03 < V_2 < 546,78$ Kg. de superfosfato/Ha.
$834,82 < x < 987,17$ Kg. de judías/Ha.

Tabla de óptimos económicos para la función tres medios

Para calcular la familia de óptimos económicos de la función tres medios procederemos de igual forma a como hicimos para la función cuadrática. Es decir, deberemos sustituir en [14] f_1 y f_2 por las derivadas de [23] con respecto a V_1 y V_2, dejando P_x, P_1 y P_2 como parámetros. De esta manera obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$6,0432 - 0,3199\, V_1^{1/2} - 0,0006\, V_2 = P_1/P_x \qquad [40]$$

$$1,0716 - 0,0406\, V_2^{1/2} - 0,0006\, V_1 = P_2/P_x \qquad [41]$$

Igual que hicimos para la función cuadrática, el sistema de ecuaciones paramétricas formado por [40] y [41] se ha resuelto en el ordenador IBM modelo 1130 del Instituto Nacional de Investigaciones Agrarias para el mismo campo de variación de los precios. Los 1.386 ($11 \times 14 \times 9$) planes de producción para la función tres medios vienen recogidos en la tabla II. La estructura de esta tabla es la misma que la de la tabla I. Así, por ejemplo, si el precio de la semilla es de 50 ptas/Kg.; el precio del superfosfato, de 6 ptas/Kg., y el precio esperado de la judía, de 41 ptas/Kg, la fila correspondiente de la tabla II nos indica que las dosis óptimas de semilla y superfosfato, la producción y el margen correspondiente a dichas dosis óptimas para la estructura de precios anterior es:

$V_1 = 206,14$ Kg. de semilla/Ha.
$V_2 = 389,68$ Kg.de superfosfato/Ha.
$x = 917,9$ Kg. de judías/Ha.
$m = 24.990$ ptas/Ha.

En la tabla II las dosis óptimas de semilla, superfosfato y la cantidad de producto obtenido con estas dosis presenta la siguiente variación:

$146,2 < V_1 < 253,1$ Kg. de semilla/Ha.
$334,0 < V_2 < 485,9$ Kg. de superfosfato/Ha.
$830,1 < x < 966$ Kg. de judías/Ha.

* * *

Es interesante hacer constar que los elementos de las columnas sexta y séptima de la tabla I (que nos indican producción y margen) son del mismo orden a los elementos homólogos de dichas columnas en la tabla II. Por tanto, en nuestro caso, para cualquier estructura de precios los óptimos económicos generados por la función cuadrática son del mismo orden que los óptimos económicos generados por la función tres medios. Es decir, para el caso estudiado cualquiera que sea la estructura de precios, las decisiones de siembra y abonado pueden tomarse basándose en la tabla I o en la tabla II.

Asimismo, es interesante tener en cuenta que todos los óptimos económicos calculados en las tablas I y II caen dentro del campo de las observaciones experimentales.

6. DETERMINACION DE LA FAMILIA DE ISOCLINAS O CURVAS EUTOPICAS

(ABACOS PARA OBTENER PLANES DE PRODUCCION A COSTE MINIMO)

Las tablas de óptimos económicos determinadas en el apartado 5 permiten establecer el plan de producción (dosis de semilla y superfosfato) que proporcionan al empresario un beneficio máximo para una estructura de precios dada. Ahora bien, en ocasiones los objetivos del empresario pueden diferir del máximo beneficio. Un objetivo distinto de la maximización del beneficio, puede consistir en determinar el plan de producción (dosis de semilla y superfosfato en el caso que estamos estudiando) que permite al empresario obtener una cantidad de producto fijada de antemano a coste mínimo. La determinación de los planes de producción a coste mínimo es una tarea sencilla. Basta con utilizar el teorema I del modelo básico, así como su correspondiente corolario. Derivando [21] con respecto a V_1 y V_2 y sustituyendo dichas derivadas en la expresión [12] obtenemos:

$$\frac{3{,}7336 - 0{,}0104\,V_1 - 0{,}0006\,V_2}{0{,}7304 - 0{,}001\,V_2 - 0{,}0006\,V_1} = \frac{P_1}{P_2} \qquad [42]$$

Ahora bien, la expresión [42], según la definición VI del modelo básico, representa la familia de isoclinas de parámetros P_1, P_2. Según el corolario del teorema I para unos precios P_1 y P_2 dados, las cantidades de semilla y superfosfato que nos permiten obtener una cantidad de producto X_0 a coste mínimo las obtenemos resolviendo el sistema de ecuaciones formado por [42] y por [21] particularizando

Tabla I

OPTIMOS ECONOMICOS PARA LA FUNCION CUADRATICA

P_x (1)	P_1 (2)	P_2 (3)	V_1 (4) *Semilla*	V_2 (5) *Abono*	x (6) *Producto*	m (7) *Margen*
37	64	3,50	163.31002	528.77695	866.3847	19753.6700
37	64	4,00	164.09022	515.07711	866.3458	19492.7125
37	64	4.50	164.87043	501.37727	866.1217	19238.5989
37	64	5.00	165.65063	487.67744	865.7125	18991.3352
37	64	5.50	166.43083	473.97760	865.1181	18750.9215
37	64	6.00	167.21104	460.27776	864.3386	18517.3576
37	64	6.50	167.99124	446.57793	863.3740	18290.6437
37	64	7.00	168.77144	432.87809	862.2242	18070.7797
37	66	3.00	167.13452	545.59759	857.0134	19701.8252
37	66	3,50	157.91472	531.89776	857.2017	19432.4513
37	66	4.00	158.59492	518.19792	857.2049	19169.9274
37	66	4.50	159.47513	504.49808	857.0230	18914.2533
37	66	5,00	160.25533	490.79825	856.6560	18665.4293
37	66	5.50	161.03553	477.09841	856.1038	18423.4551
37	66	6.00	161.81573	463.39858	855.3665	18188.3309
37	66	6.50	162.59594	449.69874	854.4440	17960.0565
37	66	7,00	163.37614	435.99890	853.3364	17738.6321
39	40	3.00	232.56703	506.04154	959.8493	26613.3202
39	40	3.50	233.30722	493.04426	959.5254	26363.5488
39	40	4.00	234.04741	480.04698	959.0348	26120.2759
39	40	4.50	234.78761	467.04970	958.3776	25883.5018
39	40	5.00	235.52780	454.05242	957.5538	25653.2262
39	40	5.50	236.26799	441.05513	956.5633	25429.4493
39	40	6.00	237.00818	428.05785	955.4063	25212.1711
39	40	6.50	237.74838	415.06057	954.0825	25001.3915
39	40	7.00	238.48857	402.06329	952.5922	24797.1105
39	42	3.00	227.44841	509.00231	954.6960	26153.3048
39	42	3.50	228.18860	496.00503	954.4100	25902.0529
39	42	4.00	228.92879	483.00775	953.9574	25657.2997
39	42	4.50	229.86899	470.01047	953.3382	25419.0451
39	42	5.00	230.40918	457.01319	952.5523	25187.2892
39	42	5.50	231.14937	444.01590	951.5998	24962.0320
39	42	6.00	231.88956	431.01862	950.4806	24743.2733
39	42	6.50	232.62976	418.02134	949.1949	24531.0133
39	42	7.00	233.36995	405.02406	947.7425	24325.2520
39	44	3.00	222.32979	511.96308	949.2801	25703.5265
39	44	3.50	223.06998	498.96580	949.0321	25450.7943
39	44	4.00	223.31017	485.98852	948.6175	25204.5607
39	44	4.50	224.55037	472.97124	948.0362	24964.8258
39	44	5.00	225.29056	459.97396	947.2883	24731.5895
39	44	5.50	226.03075	446.97668	946.3737	24504.8518
39	44	6.00	226.77094	433.97939	945.2925	24284.6128
39	44	6.50	227.51114	420.98211	944.0447	24070.8724
39	44	7.00	228.25133	407.98483	842.6303	23863.6307
39	46	3.00	217.21117	514.92385	943.6018	25263.9856
39	46	3,50	217.95136	501.92657	943.3917	25009.7730
39	46	4.00	218.69155	488.92929	943.0150	24762.0590
39	46	4.50	219.43175	475.93201	942.4717	24520.8437
39	46	5.00	220.17194	462.93473	941.7617	24286.1270
39	46	5.50	220.91213	449.93745	940.8852	24057.9089
39	46	6.00	221.65232	436.94016	939.8419	23836.1896
39	46	6.50	222.39252	423.94288	938.6321	23620.9688
39	46	7.00	223.13271	410.94560	937.2556	23412.2467
39	48	3.00	212.09255	517.83462	937.6609	24834.6819
39	48	3.50	212.83274	504.88734	937.4888	24578.9889
39	48	4.00	213.57293	491.89006	937.1501	24329.7945
39	48	4.50	214.31313	478.89278	936.6447	24087.0988
39	48	5.00	215.05332	465.89550	935.9727	23850.9017
39	48	5.50	215.79351	452.89822	935.1341	23621.2033
39	48	6.00	216.53370	439.90094	934.1289	23398.0035

Tabla II

OPTIMOS ECONOMICOS PARA LA FUNCION TRES MEDIOS

P_x (1)	P_1 (2)	P_2 (3)	V_1 (4) *Semilla*	V_2 (5) *Abono*	x (6) *Producto*	m (7) *Margen*
39	66	3.00	161.24725	488.24719	863.7	21579.
39	66	3.50	161.91480	474.00773	863.6	21338.
39	66	4.00	162.57357	459.98446	863.4	21104.
39	66	4.50	163.22350	446.17716	863.0	20878.
39	66	5.00	163.86454	432.58562	862.4	20658.
39	66	5.50	164.49664	419.20961	861.7	20445.
39	66	6.00	165.11976	406.04891	860.8	20239.
39	66	6.50	165.73384	393.10329	859.8	20039.
39	66	7.00	166.33884	380.37253	858.6	19846.
41	40	3.00	225.15085	452.08752	945.6	28408.
41	40	3.50	225.87579	438.99814	945.2	28185.
41	40	4.00	220.59090	426.10693	944.8	27969.
41	40	4.50	227.29614	413.41365	944.1	27759.
41	40	5.00	227.99143	400.91805	943.4	27555.
41	40	5.50	228.67682	388.61989	942.5	27358.
41	40	6.00	229.35221	376.51891	941,4	27167.
41	40	6.50	230.01758	364.61488	940.3	26981.
41	40	7.00	230.67289	352.90754	939.0	26802.
41	42	3.00	220.43940	454.99584	941.1	27962.
41	42	3.50	221.15886	441.86747	940.8	27738.
41	42	4.00	221.86862	428.93710	940.3	27520.
41	42	4.50	222.56863	416.20449	939.7	27309.
41	42	5.00	223.25886	403.66943	939.0	27104.
41	42	5.50	223.93927	391.33166	938.1	26905.
41	42	6.00	224.60983	379.19093	937.1	26813.
41	42	6.50	225.27049	367.24701	935.9	26526.
41	42	7.00	225.92123	355.49964	934.7	26346.
41	44	3.00	215.77897	457.88185	936.4	27526.
41	44	3.50	216.49288	444.71499	936.1	27300.
41	44	4.00	217.19722	431.74598	935,7	27081.
41	44	4.50	217.89194	418.97459	935.1	26869.
41	44	5.00	218.57701	406.40057	934.4	26662.
41	44	5.50	219.25239	394.02370	933.5	26462.
41	44	6.00	219.91804	381.84374	932.5	26268.
41	44	6.50	220.57393	369.86044	931.4	26080.
41	44	7.00	221.22002	358.07355	930.2	25898.
41	46	3.00	211.16954	460.74525	931.6	27099.
41	46	3.50	211.87783	447.54043	931.3	26872.
41	46	4.00	212.57668	434.53330	930.9	26652.
41	46	4.50	213.26504	421.72363	930.3	26438.
41	46	5.00	213.94588	409.11119	929.6	26230.
41	46	5.50	214.61616	396.09574	928.8	26028.
41	46	6.00	215.27683	334.47705	927.8	25833.
41	46	6.50	215.92788	372.45488	926.7	25644.
41	46	7.00	216.56925	360.62899	925.5	25461.
41	48	3.00	206.61110	463.58576	926.5	26681.
41	48	3.50	207.31370	450.34350	926.3	26453.
41	48	4.00	208.00698	437.29877	925.9	26231.
41	48	4.50	208.69091	424.45135	925.4	26016.
41	48	4.00	209.36545	411.80099	924.7	25807.
41	48	5.50	210.03055	399.34748	923.9	25604.
41	48	6.00	210.68618	387.09057	923.0	25407.
41	48	6.50	211.33231	375.03005	921.9	25217.
41	48	7.00	211.96889	363.16566	920.7	25032.
41	50	3.00	202.10361	466.40310	921.4	26273.
41	50	3.50	202.80044	453.12393	921.2	26043.
41	50	4.00	203.48810	440.04212	920.8	25820.
41	50	4.50	204.16653	427.15745	920.3	25603.
41	50	5.00	204.83569	414.46970	919.6	25392.
41	50	5.50	205.49555	401.97864	918.8	25188.
41	50	6.00	206.14607	389.68404	917.9	24990.
41	50	6.50	206.78720	377.58566	916.8	24798.
41	50	7.00	207.41892	365.68329	915.7	24615.

X por X_0. Así, por ejemplo, si $P_1 = 50$ ptas/Kg. y $P_2 = 4{,}25$ pesetas/Kg. y $X_0 = 700$ Kg. obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{3{,}7336 - 0{,}0104\, V_1 - 0{,}0006\, V_2}{0{,}7304 - 0{,}001\, V_2 - 0{,}0006\, V_1} = \frac{50}{4{,}25} \qquad [43]$$

$$700 = 202{,}1839 + 3{,}7336\, V_1 - 0{,}7304\, V_2 - 0{,}0052\, V_1^2 - - 0{,}0005\, V_2^2 - 0{,}0006\, V_1V_2 \qquad [44]$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones [43] y [44] obtenemos el plan de producción que permita al empresario obtener una producción de 700 Kg. de judía/Ha. a coste mínimo, dicho plan de producción es:

$V_1 = 87{,}5$ Kg.de semilla/Ha.

$V_2 = 460$ Kg. de superfosfato/Ha.

Igual que ocurría con los óptimos económicos, para que el estudio de los planes de producción a coste mínimo tenga utilidad práctica deberemos efectuar un estudio paramétrico de dichos planes de producción, dejando los precios como parámetros. De esta manera, hemos construido los ábacos de las figuras 9 y 10. La construcción e interpretación de estos ábacos es sencilla. En la figura 9 están representadas las familias de isocuantas y de isoclinas de la función de producción cuadrática [21] para diferentes valores de P_1/P_2. Para obtener dicha figura basta sustituir en [42] P_1/P_2 por sus correspondientes valores y representar las curvas correspondientes sobre el mapa de isocuantas de la figura 7.

El manejo de este ábaco es sencillo. Así, por ejemplo, si el precio de la semilla es de 55 ptas/Kg.; el precio del superfosfato, 5 ptas/Kg., y el objetivo de producción, 900 Kg. de judías/Ha., el plan de producción que nos permite obtener dicha producción a coste mínimo viene dado por las coordenadas del punto de corte de la isocuanta $x_0 = 900$ con la isoclina correspondiente a $P_1/P_2 = 11$. Es decir:

$V_1 = 186$ Kg. de semilla Ha.

$V_2 = 480$ Kg. de semilla/Ha.

Para obtener la familia de isoclinas en el caso de función de producción tres medios, deberemos en primer lugar derivar [23] con respecto a V_1 y a V_2 y sustituir las derivadas en la expresión [12], de esta manera obtenemos:

$$\frac{6{,}0432 - 0{,}3199\,V_1 - 0{,}0006\,V_2}{1{,}0716 - 0{,}0406\,V_2 - 0{,}0006\,V_1} = \frac{P_1}{P_2} \qquad [45]$$

Para obtener la figura 10 correspondiente a la familia de isocuantas y de isoclinas de la función de producción tres medios, basta sustituir en [45] P_1/P_2 por sus correspondientes valores y representar las curvas correspondientes sobre el mapa de isocuantas de la figura 8. Este ábaco se maneja de igual forma que el correspondiente a la figura 9.

7. RESUMEN DE LA INVESTIGACION

El objetivo perseguido con este trabajo ha sido el de investigar de una manera cuantitativa la relación existente entre la producción de judía blanca y las cantidades empleadas de semilla y de superfosfato. Las experiencias se han realizado en el término municipal de Tiriez (Albacete) para la variedad Monquilisa, dentro de una determinada técnica de producción.

Los principales resultados y aportaciones conseguidos con esta investigación han sido las siguientes:

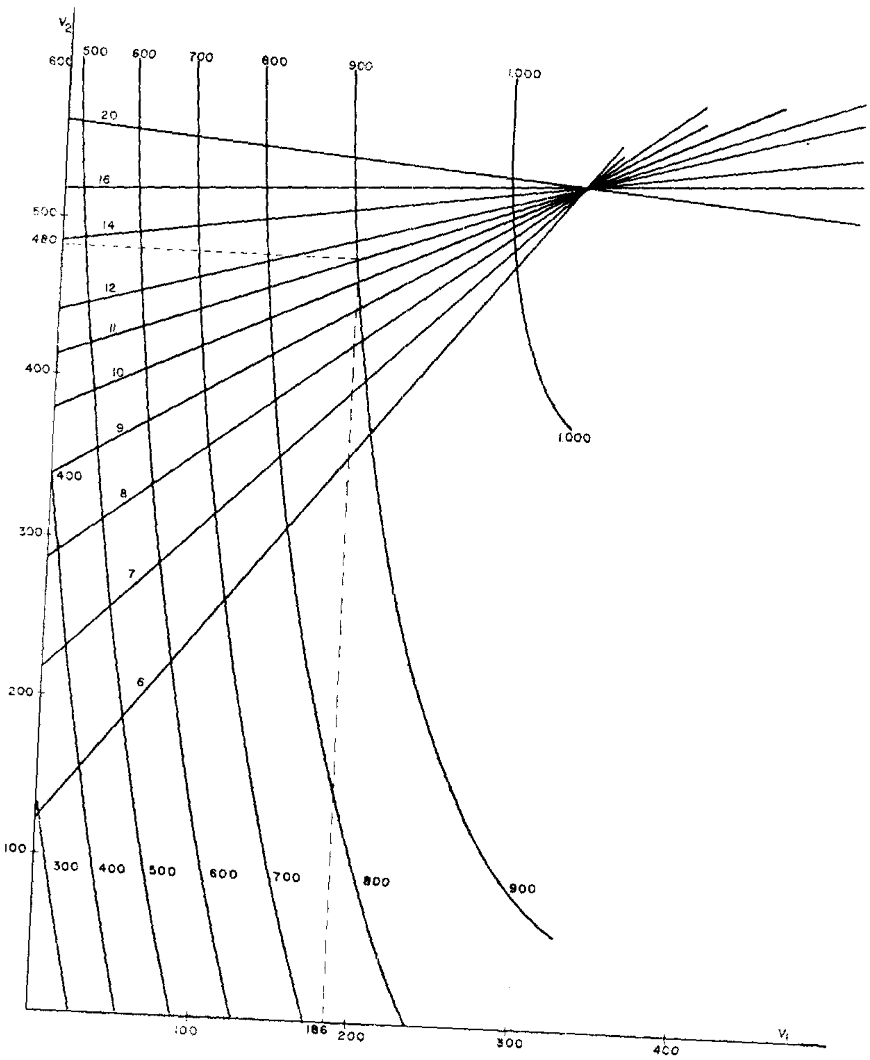
1.° Se han obtenido una colección de datos referentes a producciones de judías blancas para diferentes niveles de semilla y de superfosfato. (Véase cuadro I del apartado 3 y cuadro IV del Anejo I.)

2.° A partir de los datos anteriores y para la técnica de producción definida en el Anejo I se han obtenido una serie de funciones de producción. Las dos funciones que mejor se ajustan al fenómeno estudiado son la función cuadrática y la función tres medios. En la primera función, la semilla y el superfosfato explican el 85,4 por 100 de la producción de judías blancas. Por otra parte, en la función tres medios la semilla y el superfosfato explican el 83,7 por 100 de dicha producción de judía blanca (véase apartado 3).

3.° Se ha efectuado un análisis técnico-económico de dichas funciones de producción. De este estudio se han obtenido: los máximos técnicos, las productividades marginales, los mapas de curvas isocuantas (véase apartado 4).

4.° Se han obtenido unas tablas de óptimos económicos para las funciones de producción cuadrática y tres medios. La utilidad

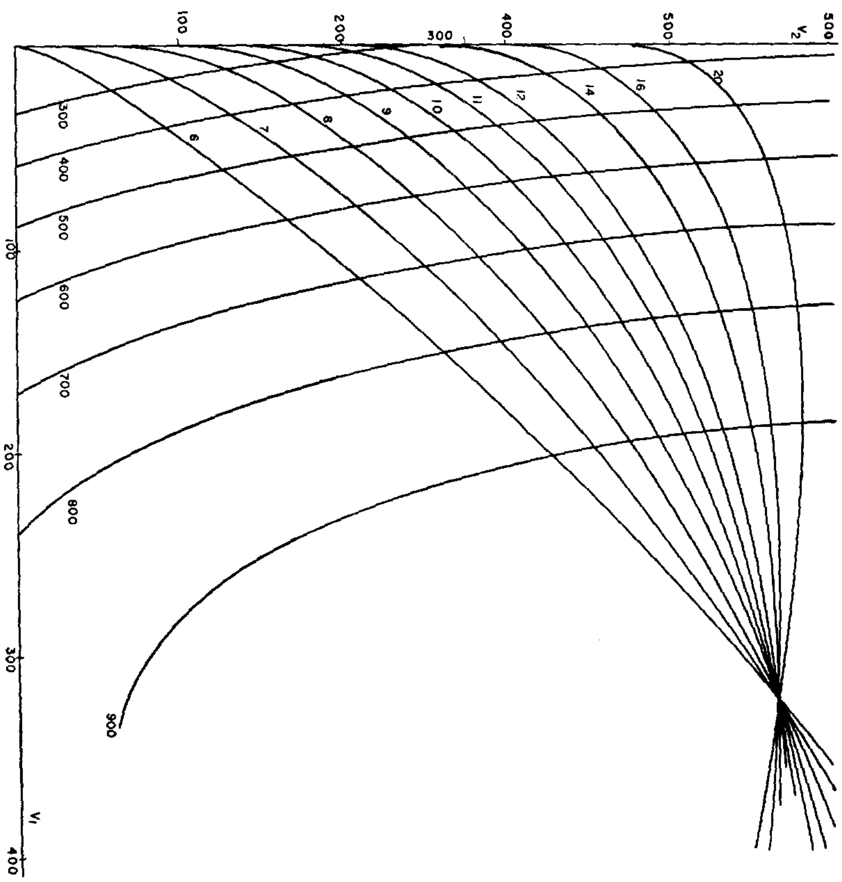
FIGURA 9. FAMILIA DE ISOCLINAS E ISOCUANTAS (FUNCION CUADRATICA)



de estas tablas es muy grande, ya que para un precio de la semilla y del superfosfato dados, y para un precio de la judía esperado, la tabla indica las cantidades de semilla y de superfosfato que se deben emplear para que el agricultor maximice su margen (véase tablas I y II, apartado 5).

FIGURA 10. FAMILIA DE ISOCLINAS E ISOCUANTAS

(FUNCION TRES MEDIOS)



5.° Se han obtenido unos ábacos de planes de producción a coste mínimo para las funciones de producción cuadrática y tres medios. La utilidad de estos ábacos es muy grande, ya que para un precio de la semilla y del superfosfato, así como para un objetivo de producción dado, los diferentes ábacos indican las cantidades de semilla y superfosfato que se deben emplear para conseguir el objetivo dado de producción a coste mínimo (véase figuras 9 y 10 en el apartado 6).

El resultado fundamental obtenido con esta investigación ha sido la elaboración de las anteriores tablas y ábacos. Si se dispusieran de colecciones de tablas y ábacos como las anteriores para los principales cultivos y para diferentes técnicas de producción, se podrían utilizar para orientar a los agricultores acerca de sus políticas óptimas de utilización de factores productivos (semilla, abono, agua de riego, etc.).

ANEJO I

DESCRIPCION DE LA EXPERIENCIA Y DE LA TECNICA DE PRODUCCION

En este apartado se va describir la experiencia realizada con la judía blanca variedad Monquilisa en el término municipal de Tiriez Albacete), así como la técnica de producción seguida en dicha experiencia. En primer lugar, comenzaremos por describir la experiencia.

a) *Elección de los factores variables*

Entre todos los factores que se emplean en la producción de judía blanca, se eligieron como factores variables de producción: la semilla y el abono fosfórico (superfosfato con una riqueza del 18 por 100 en P_2O_5). Las razones de esta elección son las siguientes:

1.° La semilla y el superfosfato son fáciles de aplicar y de medir.
2.° Es fácil hacer variar las cantidades de dichos factores.
3.° Variaciones en las cantidades de dichos factores originan variaciones fácilmente medibles en la cantidad de producto.

b) *Límites de variación de los factores variables*

La dosis normal de superfosfato es de unos 200 Kg/Ha. Por tanto, variando este factor entre una dosis mínima de 0 Kg/Ha. y una dosis máxima de 1.111 Kg/Ha. (1.000 grs/parcela de 9 m^2), para cada dosis de semilla obtenemos los puntos de la superficie de producción que tienen interés económico.

La dosis normal de semilla es de unos 130 Kg/Ha. Por tanto, variando este factor entre una dosis mínima de 55 Kg/Ha. (50 grs/parcela de 9 m^2), y una dosis máxima de 500 Kg/Ha. (450 grs/parcela de 9 m^2), para cada dosis de superfosfato obtenemos los puntos de la superficie de producción que tienen interés económico.

c) *Cuadro de variación de los factores variables semilla y superfosfato*

El cuadro II recoge la variación de las dosis de semilla y superfosfato en gramos por parcela de 3 × 3 metros cuadrados. La semilla variando de 100 en 100 gramos y el superfosfato de 200 en 200 gramos. Como se aplican seis dosis diferentes de superfosfato, así como cinco de semilla, y además, para cada dosis de un factor, el otro tiene que variar desde la dosis mínima a la máxima, el número de subparcelas experimentales será de 30 (6 × 5).

Cada numeración del cuadro II corresponde a una dosis de semilla y de superfosfato. Así, por ejemplo, a la subparcela 26 le corresponde una dosis de 450 g. de semilla y 200 g. de superfosfato.

Cuadro núm. II

Superfosfato (gr/parcela 9 m^2) / Semilla (gr/parcela 9 m^2)	0	200	400	600	800	1000
50	1	2	3	4	5	6
150	7	8	9	10	11	12
250	13	14	15	16	17	18
350	19	20	21	22	23	24
450	25	26	27	28	29	30

d) *Sorteo de las subparcelas*

Para evitar los sesgos producidos por la asignación subjetiva de las 30 subparcelas a las diferentes dosis de semilla y superfosfato, se realizó esta asignación por medio de un sorteo. Para efectuar el sorteo se utilizó una tabla de números aleatorios. El primer número aleatorio que se obtuvo fue el 35.822. Este número nos indicó que la combinación 22 (350 g. de semilla y 600 g. de superfosfato) se aplica en la primera subparcela (véase cuadro III). Procediendo de igual forma, se obtuvieron los demás elementos del cuadro III. Este cuadro nos indica que en la primera subparcela aplicamos la combinación (360, 600), en la segunda subparcela (250, 200) y así sucesivamente.

Cuadro núm. III

(350,600)	(250,200)	(150,200)	(50,800)	(450,1000)	(350,0)
(250,800)	(150,1000)	(150,600)	(350,400)	(250,600)	(150,800)
(150,0)	(450,600)	(150,400)	(350,200)	(350,1000)	(50,1000)
(50,0)	(250,400)	(50,200)	(350,800)	(50,400)	(450,0)
(250,0)	(450,400)	(50,600)	(250,1000)	(450,800)	(450,200)

e) *Elección de la parcela*

Todas las partes del bancal en el que se iba a realizar la experiencia parecían tener la misma calidad (textura, estructura, etc.). No obstante, observamos que existían partes de tierra que se mantenían permanentemente húmedas, por estar lindando con acequias, así como la existencia de una hilera de árboles cuyas raíces podían entablar competencia con el cultivo y desvirtuar el experimento.

Teniendo en cuenta todas estas circunstancias, situamos la parcela objeto de la experiencia a 25 metros de la hilera de árboles y a 6 metros de la acequia más cercana. De esta manera logramos que la parcela elegida, de 15 $\times$ 18 metros cuadrados, fuese homogénea.

f) *Preparativos*

Con una báscula que apreciaba dos miligramos procedimos a pesar las diferentes dosis de semilla. De esta manera pesamos:

— 6 dosis de 50 gramos de semilla
— 6 dosis de 150 gramos de semilla
— 6 dosis de 250 gramos de semilla
— 6 dosis de 350 gramos de semilla
— 6 dosis de 450 gramos de semilla

Una vez pesada cada dosis de semilla se introdujo en una bolsa de papel, juntamente con una etiqueta en la que figuraba escrita la cantidad que contenía cada bolsa. Para pesar las diferentes dosis de superfosfato procedimos de igual forma. De esta manera pesamos:

— 5 dosis de 200 gramos de superfosfato (18 por 100 de riqueza)
— 5 dosis de 400 gramos de superfosfato (18 por 100 de riqueza)
— 5 dosis de 600 gramos de superfosfato (18 por 100 de riqueza)
— 5 dosis de 800 gramos de superfosfato (18 por 100 de riqueza)
— 5 dosis de 1.000 gramos de superfosfato (18 por 100 de riqueza

Una vez pasada cada dosis de superfosfato se procedió como en el caso de la semilla. Es decir, se introdujo la dosis en una bolsa de papel juntamente con una etiqueta en la que figuraba escrita la cantidad que contenía cada bolsa.

g) *Realización de la experiencia*

Con 42 estacas delimitamos dentro de la parcela de 15 $\times$ 18 m^2 las 30 subparcelas que iban a llevar las 30 combinaciones diferentes de superfosfato y de semilla. Estaquillamos en primer lugar las esquinas de la parcela, luego los lados. A continuación, con ayuda de una cinta métrica y apoyándonos en el estaquillado de los lados, estaquillamos las subparcelas interiores.

El día 6 de julio de 1974 procedimos a abonar de la siguiente manera: con el cuadro III en la mano, introducía en una jarra metálica (una especie de salero grande) el superfosfato que contenía la bolsa correspondiente a cada subparcela. A continuación espolvoreaba la subparcela con el superfosfato, teniendo cuidado de que la distribución fuese uniforme a lo largo de la subparcela.

El mismo día procedimos a realizar la siembra de la siguiente manera: la dosis de semilla correspondiente a cada subparcela la distribuimos con la mano a «chorrillo». Después se enterró con una azada, simulando la labor del rastro.

h) *Resultado de la experiencia*

La recolección se efectuó el día 5 de noviembre, de la siguiente manera. De cada una de las subparcelas se recogían las vainas correspondientes a una superficie de cuatro metros cuadrados (localizada en el centro de la parcela) y no de nueve metros cuadrados, con objeto de eliminar el posible efecto de competencia entre parcelas. Las vainas se introducían en bolsas acompañadas de una etiqueta en la que figuraba escrito el número de la subparcela correspondiente. A continuación, dichas bolsas se vaciaban en una manta extendida sobre el suelo y se desgranaban las vainas. Los granos se introducían juntamente con la etiqueta en la que figuraba el número de la parcela en una bolsa de plástico que se cerraba con una goma. Dos días después de la recolección se efectuó el pesaje de las judías. Las producciones correspondientes a cada subparcela figuran reflejadas en el cuadro IV. La interpretación de este cuadro es sencilla. Así, por ejemplo, nos indica que la producción correspondiente a la subparcela que se sembró con una dosis de 150 Kg. de semilla/Ha. y se abonó con una dosis de 200 Kg. de superfosfato/Ha. es de 238,4 gramos de judías/4 m^2, o lo que es lo mismo, 596 Kg. de judías/Ha.

Cuadro núm. IV

Superfosfato (gr/parcela 4 m^2) / Semilla (gr/parcela 4 m^2)	0	200	400	600	800	1000
50	199,2	200,8	280	244	244,8	208
150	227,6	238,4	399,2	318,4	291,8	301,6
250	241,2	262,8	424,4	449,6	424,4	307,2
350	348,8	360,8	366,8	414	348,8	342,4
450	343,2	344	273,6	391,2	277,6	222

A continuación vamos a describir la técnica de producción, es decir, las calidades de los factores paramétricos, las cantidades de todos los factores, así como la organización del proceso productivo (véase conceptos fundamentales del modelo básico, página 5).

1.° *Calidades de los factores variables*

Como dijimos en la primera parte de este apartado, los factores variables de producción elegidos han sido la semilla (variedad *Moquilisa*) y el superfosfato (con una riqueza del 18 por 100 de P^2O^5).

2.° *Labores preliminares*

Estas labores se realizaron entre el 20 de junio y el 5 de julio de 1974. En primer lugar se quemó el rastrojo del cultivo precedente (la cebada), con el fin de limpiar el suelo de pajas que son perjudiciales y pueden interferir el próximo cultivo. Cinco días antes de la siembra se dio un riego a manta (800 m^3/Ha.), con el fin de que en el momento de la siembra la tierra presentará unas condiciones óptimas de humedad.

3.° *Siembra y abonado.* (Véase descripción de la experiencia).

4.° *Riegos*

Veintiún días después de la nacencia se dio el primer riego (400 m^3/Ha.). Este riego se dio a «manta», pues el terreno estaba llano como consecuencia del pase de rastro. Seis días después de este riego se dio un pase de cultivador, quedando el terreno alomado. Cinco días después de esta labor se dio el primer riego por surcos (300 m^3/Ha.). A partir de este riego, cada nueve días se dio un nuevo riego por surcos (300 m^3/Ha.), hasta un mes antes de la recolección, en que suspendimos dichos riegos.

5.° *Tratamiento*

Para evitar royas y otras enfermedades anticriptogámicas se dio un tratamiento con azufre en flor al aparecer la primera floración el día 10 de agosto. El día 10 de septiembre se repitió este tratamiento.

6.° *Recolección* (Véase descripción de la experiencia.)

7.° *Características edafológicas y climáticas*

El suelo, en cuanto a su formación, es de origen cuaternario, formado por los acarreos del río Lezuza. Su textura es arcillosa, teniendo una capa arable de aproximadamente metro y medio de espesor. La capacidad de campo es de 27,33 por 100. El PH del suelo es de 8,6. El contenido de materia orgánica oxidable es del 2,8 por 100.

Los veranos en la zona en que se desarrolló la experiencia son típicamente continentales, es decir, secos y calurosos. En ocasiones se desarrollan tormentas de intensidad variable. A partir del mes de septiembre las temperaturas bajan de una manera acusada. las lluvias de otoño suelen aparecer a primeros de octubre. Durante el período en que se desarrolló la experiencia la precipitación fue de 60,8 milímetros. En dicho período caben destacar los siguientes fenómenos metereológicos:

a') Una tormenta a mediados de agosto, que pudo perjudicar primera floración.

b') Lluvias en los primeros días de octubre, que retrasaron la maduración y el secado de granos.

c') Una helada a últimos de octubre, que pudo perjudicar algo la producción, ya que se helaron parte de los frutos de la última floración.

ANEJO II

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

1. Abraham, T. P., and Rao, V. Y. (1960): «Economy analysis of fertilizer trial data on paddy and wheat», *Indian Journal Agric. Sci.*, 30 pág., 1-17.
2. Abraham, T. P. (1965): «Optimal Fertilizar dressings and economics, *Indian Journal Agricultural Economic*, 20 pág., 1-20.
3. Anderson, J. R. (1967): «Some practical notions for stimating agricultural», *Journal Australian Institute Agricultural Science*, 33, pág. 105-205.
4. Antill, A. G. (1955): «Towards a production function for dairy farms», *The Farm Economist*, 8, pág. 1-11.
5. Baird, B. L., and Mason D. D. (1959): «Multivariable equations describing fertility-corn yield response surfaces and their agronomic and economic interpretation, *Agronomy Journal*, 51, pág. 152.
6. Ballestero, E. (1974): «Principios de Economía de la Empresa, *Alianza Universidad*, 1973.
7. Bhattacharjee, J. P. (1955): «Resource use and productivity in world agriculture», *Jour. Far Econ.*, 37, pág. 57-72.
8. Bilas, R. A. (1975): «Teoría microeconómica», *Alianza Universidad.*
9. Bronfenbrenner, M., y Douglas, P. H. (1939): «Cross-section studies in the Cobb-Doublas function», *Journal of Political Economy*, vol 47, págs. 761-785.
10. Bronfenbrenner, M. (1944): «Production function: Cobb-Douglas, interfirm, intrafirm», *Econometrica*, 12, págs. 35-44.
11. Brown, W. G., and Merril, M. O. (1958): «Production functions from data over a series of years, *Journal Farm Economics*, 40, págs. 451-457.
12. Brow, G., y Arscott, G. H. (1958): «A method for dealing with time in determining optimum factor inputs», *Journal Farm Econ.*, 40, páginas 66-73.
13. Brown, W. G., and Arscott, G. H. (1960): «Animal production functions and optimum ration specifications», *Journal Farm Economics*, 42, páginas 69-78.
14. Carlson, S. (1939): «A study on the pure theory of production». New York: Kelley and MacMillman.
15. Chenery, H. B. (1949): «Engineering production functions», *Quaterly Journal of Economics.* Noviembre, págs. 507-531.
16. Colwell, J. D. (1963): «The stimation of the phosphorus fertilizer requirements of wheat in southern New South Wales by soil analysis», *Australian Journal Expt. Agric. Animal Hus.*, 3, págs., 190-7.
17. Dean, G. W. (1960): «Consideration of time and carryover effects in milk production functions», *Journal Farm Economics*, 42, págs. 1512-1514.
18. Dillon, J. L. (1968): «The analysis of response in crop and livestock productions», *Pergamon Press.*
19. Doll, J. P.; Jebe, E. H., and Munson, R. C. (1960): «Computation of variance estimater for marginal physical products and marginal rates of substitution», *Journal Farm Economics*, 42, págs. 596-607.

20. DOUGLAS, P. H. (1943): «The production functions for Canadian manufactures», *Journal Amer. Stat. Assn.*, 39, págs. 178-86.
21. DOUGLA, H. (1941): «The production function for Australian manufacturing. Qart.», *Journal Econm.*, 56, págs. 108-29.
22. DOUGLAS, P. H., and OLSON, E. (1943): «The production functions for manufacturing in the United States, 1904», *Journal Pol. Econ.*, 51, páginas 61-65.
23. DULOY, J. (1959): «Resource allocation and the filled production function», *Australian Journal Agric. Econ.*, 3, págs. 75-85.
24. FAO (1966): «Estadística de la respuesta de los cultivos al abonado»,
25. FELLOWS, Irving F. (1949): «Developing and aplying production functions in farm management», *Journal Farm Econ.*, 31, págs. 1058-1064.
26. FERNÁNDEZ BLANCO, M. (1973): «Inputs óptimos para el cultivo de Remolacha Azucarera en España», *Instituto Nacional de Investigaciones Agrarias.*
27. FRENCH, Burton L. (1956), «Simultaneus economic relationships and derivation of the production function, In Heady, E. O. JOHNSON, GLENN L., and HARDIN, LOWELLS. eds. Resource productivity, returns to scales, and farm size», págs. 97-105. *Iowa State University Press.* Ames Iowa.
28. FRISCH, H. (1963): «Las leyes técnicas y económicas de la producción», *Sagitario*, S. A.
29. FULLER, W. A. (1967): «Some topics in production function analysis». J. L. Dillon (Ed.), *Agricultural Production Economics in the* 1960's.
30. GRILICHES, Zvi. (1957): «Spicification bias in estimates of production functions», *Journal Farm Economics*, 39, págs. 8-20.
31. HEADY, Earl O. (1946): «Production functions form a random sample of farms», *Journal Farm Economics*, 28, págs. 989-1004.
32. HEADY, E. O. (1950»: «Application of recent economic theory in agricultural production economics», *Journal Farm Economics*, 32, páginas 1125-1139.
33. HEADY, Earl. O. (1951): «Aproduction functions and marginal rates of substitution in the utilization of feed resources by dairy cows», *Journal Farm Economics*, 33, págs. 485-495.
34. HEADY, Earl. O. (1952): «Economics of agricultural productions and resource use», *Prentice/Hall.*
35. HEADY, E. O., and PESEK, J. (1954): «A fertilizer production surface with specification of economic optima for corn grown on calcareous Ida Silt loam», *Journal Farm Economics*, 36, págs. 466-482.
36. HEADY, E. O. (1956): «Technical considerations in estimating production function». In Heady, Earl O.; JOHNSON, GLENN L. and HARDIN LOWEL, S., editores. *Resource productivity, retourns to scale, and farm size*, págs. 3-15. Iowa State University Press. Ames, Iowa.
37. HEADY, E. O. (1957): «Organization activities and criteria in obtaining and fitting technical production functions». *Journal Farm Economics*, 39, pág. 360-369.
38. HEADY, E. O. (1957): «An econometric investigation of the tecnology of agricultural production functions», *Econometrica*, 25, págs. 249-268.

39. HEADY, E. O. (1958): «Output in relation to input, for the agricultural industry». *Journal Farm Economics*, 40, págs. 393-406.
40. HEADY, E. O. and DILLON, J. L. (1961): «Agricultural production functions», *Iowa State Univ. Press*, Ames.
41. HEADY, E. O. (1964): «Milk productions funstions incorporating variables for cow characteristics and enviroment», *Journal Farm Economics*, 46, páginas 1-19.
42. HEADY, E. O. (1963): «Experimental production and profit functions for beef steaks», *Canadian Journal and enviroment Economics*, 11, páginas 29-40.
43. HENDERSON, J. M., and QUANDT, R. E. (1962): «Teoría microeconómica», Ariel.
44. HICKS, J. R. (1945): «Valor y capital», *Fondo de Cultura Económica.*
45. HOCH, Irving (1958): «Simultaneus equation bias in the context od the Cobb-Douglas Production function», *Econometrica*, 26, pág. 566-579.
46. HOFFNAR, B. R. (1963»: «Some practical stadistical notions for production function studies», *Journal Farm Economics*, 45, págs. 1226-1231.
47. INKSON, R. H. E. (1964): «The precision of stimates of the soil conten of phosphate using the Mitscherlich response equation», *Biometrics*, 20, págs. 873-882.
48. JARRET, F. G. (1957): «Resource productivities and production functions», *Australian Journal Agric. Econ.*, 1, págs. 67-68.
49. KOGIKU, K. C. (1971): «Microeconomics Models», A Harper international edition.
50. LIEBIG, Justus Von (1855): «Die Grundsätze der agricultur chemie mit sücksicht auf die in England angestelleten untersuchugen», Friederich Viewig unil Sohn. Braunschweig.
51. MASON, D. D. (1956), «Functional models and experimental designs for characterizing response curves and surfaces», In E. L. Braun et al. (eds.), *Economy Analysis of fertilizer Use Data.* Iowa State Univ. Press., Ames., pág. 76-98.
52. MAUNDER, A. H. (1956): «Some farm experiments in the use of resources an application of marginal analysis», *The Farm Economist*, 8, páginas 17-27.
53. MAY, Kenneth (1949): «Structure of the production function of the firm», *Econometrica*, 17, pág. 186-187.
54. MAY, Kenneth (1950): «A note on the pure theory of production», *Econometrica*, 18, pág. 56-59.
55. MITSCHERLICH, E. A. (1909): «Das Gesetz del Minimus und das Gesetz des abnehmenden Bodenertrages», *Landw Jahrb*, 38, págs. 537-52.
56. MOORE, C. V. (1961): «A general analytical framework for estimating the production function for crops using irrigation water», *Journal Farm Economics*, 43, págs. 876-888.
57. MUNDLAR, Y. (1964): «Transcendental multiproduct production functions», *International Economic Review*, 5, págs. 273-284.
58. NELSON, M.; CASTLE, E. N., and BROYN, W. G. (1957): «The use of the production function and linear programming in valuation of intermediate products», *Land Economics*, 33, págs., 257-261.

59. OURY, B. (1965): «Allowing for weather in crop production model building», *Journal Farm Economics*, 47, págs. 270-283.
60. PARISH, R. M., and DILLON, J. L. (1955): «Recent applications of the production function in farm management research», *Rev. of Markeing and Agr. Econ.*, 23, págs. 115-136.
61. PLAXICO, J. S. (1955): «Problems of factor-production aggregation in Cobb-Douglas value productivity analysis». *Journal Farm Econ.*, 37, páginas 664-75.
62. REDMA, John C. (1952): «Economic aspects of feeding for milk production», *Journal Farm Economics*, 34, págs. 333-346.
63. ROBINSON, Joan (1955): «The production function», *Econ. Journal*, 66, páginas 67-71.
64. SAMUELSON, P. A. (1971»: «Fundamentos del análisis económico», *El Ateneo.*
65. SCHNEIDER, E. (1934): «Teorie der Produktion», Wien: Julius Springer.
66. SPILLAMAN, W. J. (1923): «Application of the law of diminishing returns to some fertilizer and feed data», *Jour. Farm Econ.*, 5, pág. 36-52.
67. SURNARAYANA, K. S. (1958): «Resource returns in Telengana farms a production function study», *Indian Journal Agr. Econ.*, 13, págs. 20-26.
68. TINTER, G., and BROWN LEE, O. H. (1944): «Production functions derived form farm records», *Journal Farm Econ.*, 26, págs. 566-571.
69. TINTNER, G. (1944): «A note on the derivation of production functions from farm records», *Econometrica*, 12, pág. 26-34.
70. TRAMEL, T. E. (1957): Alternative methods for usings production functions for marketing recommendations», *Journal Farm Econ.*, 39, páginas 790-804.
71. TRANT, G. I. (1951): «Adjusting for price levels in production function studies». In Heady, JOHNSON, GLENN L. and HARDIN LOWELL S., eds., *Resource productivity, returns to scale, and farm size*, págs. 162-167. Iowa State University Press, Ames Iowa.
72. VALDÉS, A. (1966): «Análisis económico del uso de fertilizantes en Trigo, Maíz y Papas», *Facultad de Agronomía, Universidad Católica de Chile*, Santiago.
73. WALLIS, K. (1976): «Introducción a la Econometría», *Alianza Universidad.*
74. WARANABE, T. (1945): «Teory of production functions», *Journal Rural Econ.*, vol. 21.
75. WRAGG, S. R., y GODSELL, T. E. (1956): «Production function for dairy farming and their application», *The Farm Economist*, 8, págs. 1-6.
76. YATES, F.; BOYD, D., and PETTIT, G. (1942): «Influence of changes in level of feeding on milk production», *Journal Agri. Sci.*, 32, págs. 428-456.
77. YUWATA, Y. (1953): «Production functions for rice and barley. Quart», *Journal Agr. Economy*, 7, pág. 1.
78. ZELLNER, A. (1951): «An interesting general form for a production function», *Econometrica*, 19, pág. 188-189.

RESUMEN

Las funciones de producción tienen una aplicación inmediata a la programación de cultivos, tanto si esta programación se enfoca a minimizar costes como a maximizar beneficios.

En este artículo se han calculado unas funciones de producción para judías blancas, variedad Monquilisa, a través de los datos obtenidos en una experiencia de campo realizada con este fin en el término municipal de Lezuza (provincia de Albacete). Una vez obtenido el cuadro de datos experimentales, se ha procedido a ajustar por mínimos cuadrados las funciones algebraicas que suelen dar mejores resultados. Una vez obtenidas estas funciones, y seleccionadas las que mejor se ajustan a los datos, se somete a las mismas a un estudio técnico económico, calculando los óptimos técnicos, funciones de productividad, etc.

Se ha pretendido también asesorar al empresario cuando se enfrenta a una de las dos situaciones siguientes:

a) Conoce el precio al que venderá el producto, o por lo menos, lo puede estimar con bastante precisión. En estos casos, para ayudar al empresario a situarse en el óptimo económico, hemos confeccionado unas tables de fácil manejo, en las cuales, entrando con los precios de los factores de producción y del producto, se obtiene instantáneamente el plan de producción óptimo y el margen bruto esperado.

b) Incertidumbre respecto al precio del producto. En este caso, conviene cambiar de estrategia y producir una cierta cantidad de producto a coste mínimo. Para resolver este problema, hemos elaborado unos ábacos que permiten situarse en el plan de producción de mínimo coste con sólo conocer la relación existente entre los precios de los factores. Estos ábacos son unas mapas de isocuantas e isoclimas, dibujadas estas últimas para distintas relaciones de los precios de los factores.

Al final del art'culo y en un Apéndice, describimos la técnica de producción y la zona en la que se ha llevado a cabo el experimento.

RÉSUMÉ

Les fonctions de production ont une application immédiate dans la programmation des cultures, que cette programmation vise à diminuer les coûts ou à augmenter les bénéfices.

Dans cet article, on a calculé des fonctions de production pour les haricots blancs de la variété "Monquilisa", d'après les données obtenues dans une expérience sur le terrain réalisée à cette fin sur le territoire de la commune de Lezuza (province d'Albacete). Une fois obtenu le tableau des données expérimentales, on a procédé à ajuster par des minimums carrés les fonctions algébriques qui donnent d'habitude de meilleurs résultats. Une fois ces fonctions obtenues et après avoir choisi celles qui s'adaptent le mieux aux données, on soumet celles-ci à une étude technico-économique en calculant les optima techinques, les fonctions de productivité, etc.

On a cherché également à aider le chef d'exploitation quand il se trouve en face d'une des deux siauations suivantes:

a) Il connaît le prix auquel il vendra le produit ou, au moins, il peut l'estimer avec une précision suffisante. Dans ces cas, pour aider le chef d'exploitation à se situer dans l'optimum économique, nous avons des tables d'un maniement facile où entrent le prix des facteurs de production et celui des produits et grâce auxquelles on obtient instantanément le plan de production optimal et la marge brute qu'on peut en attendre.

b) Incertitude en ce qui concerne le prix du produit. Dans ce cas, il convient de changer de stratégie et de produire une certaine quantité de produit au coût minimum. Pour résoudre ce problème, nous avons élaboré des abaques qui permettent de se placer sur le plan de production au coût minimal en connaissant seulement le rapport existant entre les prix des facteurs. Ces abaques sont des cartes d'isoquantes et d'isoclines, ces dernières étant dessinées pour différent rapports des prix des facteurs.

Nous décrivons à la fin de l'article et dans un appendice la technique de la production et la zone où l'expérience a été

SUMMARY

The production functions have immediate applications in the programming of crops, whether this programming is designed to minimise cost or to maximise profits.

In this article some production functions have been calculated for haricot beans, Monquilisa variety, through the data obtained in a field experiment carried out for this purpose in the municipal district of Lezuza (province of Albacete). Once the table of experimental data had been obtained, the author proceeded to adjust by minimum squares the algebraic functions that usually give best results. Having obtained these functions and selected those that best fitted the data, they were submitted to a technical economic study, calculating the technical optibums, productitvity functions, etc.

He has also attempted to advise the business man when he is faced by one of the two following situations:

a) He knows the price at which he will sell the product, or can at least estimate it fairly accurately. In these cases, to help the busines man to place himself at the economic optimum, easily handled tables have been drawn up in which, by putting in the prices of the production factors and the product, the optimum production plan and the gross margin expected are instantly obtained.

b) Uncertainty with regard to the price of the product. In this case it is better to change the strategy and produce a certain amount of product at minimum cost. To solve this problem, some calculating frames have been produced which enable a person to situate himself in the minimum cost production plan if he only knows the relation existing betwen the prices of the factors. The calculating frames are maps of "isocuantas" and "isoclimas", the latter being draw for different relations of the prices of the factors.

In a appendix at the end of the article there is a description of the production technique and the area in which the experiment was carried out.

INFORMACION Y DOCUMENTACION