UNA APLICACION DEL MODELO DE MARKOWITZ A LA SELECCION DE PLANES OPTIMOS DE VARIEDADES DE MANZANOS EN LA PROVINCIA DE LERIDA(*)

Por
CARLOS ROMERO (**)

SUMARIO

I. INTRODUCCION.—II. NOTACION E HIPOTESIS.—III. MODELO DE MARCOWITZ.—IV. LA OBTENCION DE UN PLAN DE VARIEDADES COMO UN PROBLEMA DE TEORIA DE JUEGOS.—V. PLAN DE VARIEDADES DE MANZANOS EN LA PROVINCIA DE LERIDA.—VI. REFERENCIAS.

I. INTRODUCCION

UNA vez decidido el cultivo a implantar en una cierta superficie, el empresario se plantea un segundo problema: qué variedad o variedades de dicho cultivo elegirá a fin de conseguir unos objetivos concretos. Los rendimientos de las variedades son variables aleatorias, ya que dependen de las circunstancias climatológicas, de la presencia de enfermedades, etc.; por otra parte, los precios del producto son función de variedad de que se trate y de la coyuntura del mercado y obedece también a leyes probabilísticas. Cada una de estas variables aleatorias queda definida estadísticamente cuando se conoce su función de distribución; pero admitiendo que esta función se ajuste a la ley normal, la esperanza y la varianza determinan inequívocamente la distribución. En cualquier caso, puede decirse que la esperanza y la varianza coracterizan a la variable aleatoria. Un empresario que actúe con racionalidad preferirá aquellas variedades que tengan una esperanza de rendimiento más alta y una varianza más baja. La va-

(*) Algunos párrafos de este artículo se han tomado del trabajo del autor "Modelos de Selección de Carteras de Valores Bursátiles, con aplicación a las Bolsas españolas", publicado en la *Revista de Economía Política*, mayo de 1974.

(**) Dr. Ingeniero Agrónomo.

rianza de los rendimientos para una determinada variedad es un índice que mide el riesgo de oscilación de las cosechas. Cuanto mayor sea esta varianza, los rendimientos aparecen más dispersos, lo cual supone un riesgo más elevado.

Un plan de variedades, o simplemente un *plan*, para un cierto cultivo *A*, puede definirse por medio de un vector fila de *n* elementos $[X_1 \ldots X_j \ldots X_n]$, cuyas componentes representan los porcentajes de participación de las diferentes variedades en el cultivo A. Así, por ejemplo, si $X_j = 0{,}15$, ello significa que el empresario dedicará a la variedad j-ésima el quince por ciento de la superficie destinada al cultivo *A*. Por supuesto, se verificará siempre $\sum_{j=1}^{n} X_j = 1$. Si alguno de los elementos del vector anterior es cero, la correspondiente variedad no entra a formar parte del plan.

Desde un punto de vista formal, el problema de elegir un plan de variedades es el mismo que se plantea a un inversor cuando se pregunta en qué valores bursátiles le conviene invertir su dinero. En efecto, las variedades se corresponden con los valores bursátiles y el plan de variedades se convierte en una cartera de títulos. El problema de la selección de carteras de valores bursátiles fue planteado y resuelto en 1952 por Harry MARKOWITZ (9, 11), aunque posteriormente el modelo inicial se ha desarrollado en varias direcciones. Por analogía con el concepto de cartera eficiente en el sentido de MARKOWITZ, definiremos un plan de variedades eficiente como el de varianza mínima para una esperanza de rendimiento dada, o el de esperanza máxima para una varianza dada de los rendimientos. El problema de selección de carteras de valores consiste en generar el conjunto de las posibles carteras eficientes; pues bien, de un modo análogo, el problema de la selección de planes de variedades consistirá en determinar el conjunto de los posibles planes eficientes.

Los objetivos que se persiguen en el presente trabajo son:

1.° Adaptar el modelo original de MARKOWITZ, con objeto de abordar con él la investigación del conjunto de los posibles planes eficientes de variedades para un cierto cultivo.

2.° Aplicar dicho modelo a un caso real, dentro de la agricultura española. En el § V se ha seleccionado un plan de variedades para el cultivo del manzano en la provincia de Lérida. Las variedades consideradas son: Golden, Belleza de Roma, Starking y Stayman.

II. NOTACION E HIPOTESIS

A lo largo de este trabajo se utilizará la siguiente notación:

Q_{jt} = producción unitaria (rendimiento físico) de la j-ésima variedad en el período *t*

P_{jt} = precio percibido por el cultivador por la j-ésima variedad en el período *t*

R_{jt} = rendimiento (en unidades monetarias) de la j-ésima variedad en el período *t* (*)

$E(R_j)$ = esperanza de los rendimientos de la j-ésima variedad

σ_{jj} = varianza de los rendimientos de la j-ésima variedad

σ_{ij} = covarianza entre los rendimientos de la i-ésima variedad y de la j-ésima variedad

X_j = porcentaje de la participación de la j-ésima variedad en el plan de variedades

E_T = esperanza del rendimiento del plan de variedades

V_T = varianza del rendimiento del plan de variedades

D_T = desviación típica del rendimiento del plan de variedades

E_{T_0} = rendimiento crítico del plan de variedades

α = probabilidad de ruina.

Las hipótesis de trabajo son:

Hipótesis H_1.—Los costes variables unitarios de cultivo son los mismos para todas las variedades.

La *hipótesis H_1* no es esencial en el desarrollo de este trabajo, pudiendo levantarse sin graves inconvenientes. No obstante, conviene introducirla, ya que simplifica la exposición. Además, los costes variables de las diferentes variedades no suelen diferir considerablemente en la mayor parte de los cultivos.

Hipótesis H_2.—Los rendimientos de las diferentes variedades son variables aleatorias que siguen distribuciones probabilísticas del tipo normal.

(*) De aquí en adelante, se entenderá por rendimiento el ingreso bruto referido a una unidad de superficie; es decir, el producto "precio" × "rendimiento físico".

Esta hipótesis tampoco es esencial para el desarrollo de este trabajo, pues sólo se utilizará en la última parte del § V. No obstante, la normalidad de los rendimientos en los diferentes cultivos (o variedades) es una hipótesis que se admite, por lo general, en la programación de actividades agrícolas bajo condiciones de riesgo. Véase, entre otros [5 cap. 13, 7, 12].

El rendimiento de la j-ésima variedad en el período *t* puede definirse como el ingreso unitario generado por dicha variedad en el período *t*, es decir:

$$R_{jt} = Q_{jt} \cdot P_{jt} \qquad [1]$$

Como es bien sabido, la varianza de una variable aleatoria es invariante a un cambio de origen. Es decir, la varianza de la variable aleatoria ρ es igual a la varianza de la variable $\rho - K$, siendo K una constante. Por tanto, teniendo en cuenta esta propiedad estadística de la varianza, así como la *hipótesis H_1* y la expresión [1], el plan de variedades que minimice la varianza de los rendimientos (ingresos brutos), minimiza también la varianza del margen. (Se entiende por margen de una actividad la diferencia entre el ingreso y el coste variable de esa actividad.)

III. MODELO DE MARKOWITZ

Supongamos que, partiendo de series históricas de precios y producciones, somos capaces de hacer una predicción sobre el futuro de las *n* variedades que, en principio, consideramos incluibles en el plan para un cultivo dado. Esta predicción se concreta en el conocimiento de: 1) Las esperanzas y las varianzas de los rendimientos para las *n* variedades; 2) Las covarianzas correspondientes. Conocidas las esperanzas, varianzas y covarianzas de los rendimientos para las diferentes variedades, un sencillo cálculo estadístico proporciona la esperanza y la varianza del plan.

Según se sabe, la esperanza del plan es:

$$E_T = \sum_{j=1}^{n} E(R_j)X_j \qquad [2]$$

En cuanto a la varianza, viene dada por la expresión:

$$V_T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}X_iX_j \qquad [3]$$

Una posible forma de generar planes de variedades eficientes en el sentido de MARKOWITZ es hallar los planes de varianzas mínimas para diferentes valores del rendimiento medio. Es decir, hacer mínima la expresión [3] para un valor dado de la expresión [2]. El problema, en términos de programación matemática, puede plantearse de la siguiente forma:

Función objetivo:

$$\text{Min } V_T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} X_i X_j \qquad [4]$$

Restricciones:

$$\sum_{j=1}^{n} E(R_j) X_j = E^* \qquad [5]$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = 1 \qquad [6]$$

$$X_j \geqq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots n \qquad [7]$$

La restricción [6] significa que toda la superficie debe cultivarse. La restricción [7] significa que la participación de cualquier variedad en el plan no puede ser negativa.

Como la función objetivo [4] es de tipo cuadrático y el conjunto de restricciones [5] a [7] es lineal, el problema de generar planes eficientes se transforma en un problema de programación cuadrática paramétrica. Para cada valor que demos al parámetro E^* obtendremos un plan de variedades que es eficiente por ser el de varianza más pequeña para el valor de E^* dado. Por tanto, para generar el conjunto de todos los planes eficientes bastará con que el parámetro E^* tome todos los valores correspondientes a su campo de variación, resolviendo las correspondientes programaciones cuadráticas.

La operatividad de este procedimiento es escasa, dado que la aplicación de los algoritmos de la programación cuadrática constituye siempre una tarea muy laboriosa. El lector interesado en los algoritmos de la programación cuadrática puede consultar los trabajos (3, 10, 19), especialmente el (19).

Por lo general, el método de resolución seguido es el de los máximos y mínimos condicionados de LAGRANGE. La función de LAGRANGE para el problema anteriormente planteado, sin tener en cuenta las restricciones de no negatividad, es:

$$\text{Min } \emptyset = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} X_i X_j + \mu_1 \left[\sum_{j=1}^{n} E(R_j) X_j - E^* \right]$$

$$+ \mu_2 \left[\sum_{j=1}^{n} X_j - 1 \right] \qquad [8]$$

Derivando la expresión [8] con respecto a $X_j (j = 1, 2, \ldots n)$, así como con respecto a μ_1 y a μ_2, obtenemos el siguiente sistema de $n + 2$ ecuaciones:

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial X_1} = 2\,\sigma_{11} X_1 + 2\,\sigma_{12} X_2 + \ldots\ 2\,\sigma_{1n} X_n + E(R_1)\mu_1 + \mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial X_2} = 2\,\sigma_{21} X_1 + 2\,\sigma_{22} X_2 + \ldots\ 2\,\sigma_{2n} X_n + E(R_2)\mu_1 + \mu_2 = 0$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \qquad [9]$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial X_n} = 2\,\sigma_{n1} X_1 + 2\,\sigma_{n2} X_2 + \ldots 2\,\sigma_{nn} X_n + E(R_n)\mu_1 + \mu_2 = 0$$

$$E(R_1)X_1 + E(R_2)X_2 + \ldots E(R_n)X_n = E^*$$
$$X_1 + X_2 \ldots X_n = 1$$

El anterior sistema puede expresarse matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} & 1/2\ E(R_1) & 1/2 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2n} & 1/2\ E(R_2) & 1/2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_{nn} & 1/2\ E(R_n) & 1/2 \\ E(R_1) & E(R_2) & \ldots & E(R_n) & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ X_n \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0 \\ E^* \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [10]$$

A su vez, el sistema de ecuaciones en forma matricial [10] puede escribirse, abreviadamente, así:

$$A \cdot X = B \qquad [11]$$

donde A es la matriz de los coeficientes; X el vector columna de las incógnitas, y B, el vector columna de los términos independientes.

Premultiplicando [11] por la matriz A^{-1} se obtiene:

$$X = A^{-1} B \qquad [12]$$

La ecuación [12] permite generar el conjunto de planes de variedades eficientes. Para cada valor de E^*, penúltimo elemento del vector B, resulta un vector X, cuyos n primeros elementos nos dan la composición de un plan eficiente.

Este algoritmo presenta el inconveniente de que, para ciertos valores del parámetro E^*, algunos elementos del vector de soluciones X son números negativos. Es decir, no se cumple la restricción [7], por lo que los porcentajes de participación de algunas variedades en el plan pueden ser números negativos. A continuación explicaremos una posible forma de adaptar el algoritmo para conseguir que el vector X esté formado siempre por números positivos.

El procedimiento consiste, en esencia, en ir dando valores crecientes al parámetro E^* hasta que para un cierto $E^* = E_o^*$ el porcentaje de participación de una variedad en el plan se haga nulo. Supongamos que se trata de la s-ésima variedad. Entonces, eliminaremos la fila y la cocolumna s en la matriz A, y el elemento s en los vectores X y B. Sean $\tilde{A}$, $\tilde{X}$ y $\tilde{B}$ las matrices reducidas. La nueva ecuación matricial que permite generar planes eficientes será, por tanto:

$$\tilde{X} = \tilde{A}^{-1} \tilde{B} \qquad [13]$$

A partir de la ecuación [13], dando valores a E^* superiores a E_o^*, seguimos generando planes eficientes en los que el porcentaje de participación de la s-ésima variedad es nulo. Aplicando reiteradamente este procedimiento, se irán obteniendo planes eficientes en los que el porcentaje de participación de cualquier variedad es positivo o nulo. Hemos desarrollado en el § V un caso práctico donde se aplica este método.

IV. LA OBTENCION DE UN PLAN DE VARIEDADES COMO UN PROBLEMA DE TEORIA DE JUEGOS

El proceso de selección de un plan de variedades puede asimilarse formalmente a un juego contra la naturaleza. El centro decisor está constituido por el empresario o, en general, por la persona o personas responsables de seleccionar el plan. Las n estrategias o acciones a seguir por el centro decisor se corresponden con las n variedades que, en principio, pueden entrar a formar parte de dicho plan. Los m estados de la naturaleza pueden asimilarse a m períodos de tiempo. El elemento genérico R_{jt} de la matriz de pagos o matriz del juego representa el rendimiento de la variedad j-ésima en el período t-ésimo. Por tanto, los $n \times m$ elementos de dicha matriz representan los rendimientos de cada una de las n variedades en cada uno de los m períodos.

Como se sabe, el centro decisor puede seguir dos tipos de estrategias: puras y mixtas. Si sigue una estrategia pura, el plan está integrado por una única variedad, que es la correspondiente a esa estrategia. Si, por el contrario, el centro decisor sigue una estrategia mixta, el vector de probabilidades que define dicha estrategia representa la composición del plan. Así, un ejemplo de estrategia mixta para un centro decisor que puede elegir entre cinco variedades, viene dado por el siguiente vector:

$$[p_1, \; p_2, \; 0, \; 0, \; p_5]$$

Es decir, las variedades primera, segunda y quinta se juegan (es decir, se cultivan) con probabilidades p_1, p_2, p_5. La tercera y cuarta variedades no se juegan (no se cultivan).

De acuerdo con este enfoque, el proceso de selección de un plan de variedades se reduce a resolver un juego contra la naturaleza. Este método presenta claras ventajas desde un punto de vista operativo, ya que un juego como el anteriormente expuesto se reduce a un programa lineal. Sin embargo, no está exento de inconvenientes, como son:

1.° El plan que se obtiene por un juego no es necesariamente eficiente en el sentido de MARKOWITZ.

2.° Se obtiene solamente un plan y no un conjunto de ellos, como ocurre al aplicar el modelo de MARKOWITZ.

Este segundo inconveniente puede paliarse resolviendo el juego según los diferentes criterios de la teoría de la decisión. De esta forma, podemos obtener diferentes planes de variedades, que serán más o menos prudente. El lector interesado en los criterios clásicos más o menos arriesgados según que la psicología del centro decisor sea de la teoría de la decisión, así como en los métodos de resolución de los juegos contra la naturaleza, puede consultar [2 cap. 12, 8)]. Una panorámica de las aplicaciones de la teoría de juegos en la agricultura puede encontrarse en (1). En cuanto a las aplicaciones de la teoría de juegos para elección de variedades en cultivos españoles (especialmente para trigo), véase (14, 15, 16, 17).

Una ventaja adicional de la teoría de juegos en la selección de planes de variedades estriba en la posibilidad de incluir en el modelo todas las restricciones lineales que consideremos necesarias. De esta manera, podemos incluir las restricciones clásicas de los modelos lineales de programación de actividades agrícolas bajo condiciones de certidumbre. Esto es, restricciones referentes a las disponibilidades de capital circulante por períodos, de maquinaria, de mano de obra, etcétera. Es decir, podemos agregar en un modelo único la programación lineal y la teoría de juegos. En 1967 J. P. McInerney (13) presentó por primera vez un modelo con estas características, al que dio el nombre de *maximin programming*, aplicándolo a la programación de un conjunto de actividades agrícolas. La resolución del *maximin programming*, como la de cualquier juego contra la naturaleza, desemboca en un programa lineal.

Formalmente, no existe ningún inconveniente en introducir en el conjunto de restricciones del modelo de Markowitz inecuaciones similares a las de los modelos de programación lineal de actividades agrícolas (disponibilidades de capital circulante, mano de obra, etc.). Si operamos así, el modelo resultante reflejará con más precisión la realidad. Ahora bien, basta con que introduzcamos una inecuación lineal en el modelo de Markowitz para que los cálculos se compliquen extraordinariamente. El método de Lagrange ya no es aplicable; y en estas condiciones, para generar el conjunto de los planes de variedades eficientes hay que recurrir a la programación cuadrática paramétrica, que conduce a cálculos laboriosísimos y totalmente desproporcionados con el alcance del método.

V. PLAN DE VARIEDADES DE MANZANOS EN LA PROVINCIA DE LERIDA (*)

En este parágrafo vamos a aplicar el modelo de Markowitz, tal como se ha expuesto en el § III, a un problema de selección de variedades de manzanos en la provincia de Lérida. Las variedades que se consideran como posibles son: Golden, Belleza de Roma, Starking y Stayman. Para calcular las esperanzas y varianzas de los rendimientos de cada una de estas variedades, así como las covarianzas co-

(*) Nuestro agradecimiento al profesor Luis Torres, del Gabinete de Cálculo de la E.T.S. de Ingenieros Agrónomos de la Universidad Politécnica de Madrid, por la ayuda prestada en la realización de algunos cálculos numéricos.

rrespondientes a las mismas, se ha recurrido al método de las series históricas. Estas series comienzan en el año 1966 y terminan en el año 1974. Los datos de producciones y precios de cada variedad se han tomado de (6). Estos datos figuran en los cuadros I, II, III y IV. En las columnas (2) de dichos cuadros aparecen las producciones obtenidas para cada una de las variedades en el período considerado (se trata de manzanos en fase de plena producción). En las columnas (3) figuran los precios percibidos por los agricultores. En las columnas (4) figuran los mismos precios, pero deflacionados según el índice de coste de la vida. Las columnas (5), que corresponden a los rendimientos (en unidades monetarias) obtenidos para cada variedad, resultan multiplicando las columnas (2) y (3). Las columnas (6), en las que figuran los rendimientos deflacionados, resultan multiplicando las columnas (2) y (4).

Cuadro núm. 1

GOLDEN

Año (1)	*Q* *Kgr/Ha.* (2)	*P* *Ptas/Kg.* (3)	*P'* *ptas/Kg.* (4)	*R* *miles ptas/Ha.* (5) = (2) · (3)	*R'* *miles ptas/Ha.* (6) = (2) · (4)
1966	42.100	8,5	8,50	357,85	357,85
1967	34.700	9	8,46	312,30	293,56
1968	46.400	8,5	7,62	394,40	353,38
1969	41.300	9	7,90	371,70	326,35
1970	35.000	8,0	6,64	280,00	232,40
1971	42.500	8,0	6,13	340,00	260,44
1972	49.300	7,0	4,96	345,10	244,33
1973	50.100	6,0	3,81	300,60	190,88
1974	48.300	7,5	4,12	362,25	198,88

FUENTE: J. M. DURÁN: "Aplicaciones de la Teoría de Juegos a la selección de variedades de manzanos en la provincia de Lérida", E.T.S. de Ingenieros Agrónomos de Madrid, Cátedra de Economía de la Empresa, 1975. Manuscrito sin publicar.

Cuadro núm. 2

BELLEZA DE ROMA

Año (1)	*Q* *Kgr/Ha.* (2)	*P* *Ptas/Kg.* (3)	*P'* *ptas/Kg.* (4)	*R* *miles ptas/Ha.* (5) = (2) · (3)	*R'* *miles ptas/Ha.* (6) = (2) · (4)
1966	52.000	7	7	364	364
1967	40.100	7	6,58	280,70	263,86
1968	46.700	7	6,27	326,90	292,90
1969	56.800	6,5	5,71	369,20	324,16
1970	49.300	6,5	5,40	320,45	265,97
1971	46.400	7	5,36	324,80	248,80
1972	47.800	7	4,96	334,60	236,90
1973	56.300	5	3,18	281,50	178,75
1974	53.800	6	3,29	322,80	177,22

FUENTE: J. M. DURÁN: *Op. cit.*

Cuadro núm. 3

STARKING

Año (1)	Q Kgr/Ha. (2)	P Ptas/Kg. (3)	P' ptas/Kg. (4)	R miles ptas/Ha. (5) = (2) · (3)	R' miles ptas/Ha. (6) = (2) · (4)
1966	32.700	8,5	8,50	277,95	277,95
1967	36.200	9	8,46	325,80	306,25
1968	34.100	8,5	7,62	289,85	259,71
1969	39.500	9	7,90	355,50	312,13
1970	34.900	8,5	7,06	296,65	246,22
1971	36.700	8,5	6,51	311,95	238,95
1972	39.400	7,5	5,31	295,50	209,21
1973	38.600	7,5	4,77	289,50	183,83
1974	37.400	7,5	4,12	280,50	153,99

FUENTE: J. M. DURÁN: *Op. cit.*

Cuadro núm. 4

STAYMAN

Año (1)	Q Kgr/Ha. (2)	P ptas/Kg. (3)	P' ptas/Kg. (4)	R miles ptas/Ha. (5) = (2) · (3)	R' miles ptas/Ha. (6) = (2) · (4)
1966	42.800	6,5	6,50	278,20	278,20
1967	39.700	6,5	6,11	258,05	242,57
1968	42.100	7	6,27	294,70	264,05
1969	38.600	6	5,27	231,60	203,34
1970	37.100	6	4,98	222,60	184,76
1971	46.400	7	5,36	324,80	248,80
1972	40.400	6,5	4,60	262,60	185,92
1973	49.700	5	3,18	248,50	157,80
1974	49.900	5,5	3,02	274,45	150,67

FUENTE: J. M. DURÁN: *Op. cit.*

A partir de los datos contenidos en la columna (6) de dichos cuadros, calculamos las esperanzas y las varianzas de los rendimientos para cada una de las cuatro variedades, así como las covarianzas correspondientes a las mismas. Estos valores se han dispuesto en la siguiente matriz de varianzas y covarianzas, a la que hemos agregado una última columna cuyos elementos representan las esperanzas de los rendimientos para las diferentes variedades.

$$\begin{bmatrix} 3.532{,}92 & 3.148{,}80 & 2.404{,}65 & 2.261{,}68 & 273{,}12 \\ 3.148{,}80 & 3.351{,}80 & 2.431{,}34 & 1.961{,}80 & 261{,}39 \\ 2.404{,}65 & 2.431{,}34 & 2.541{,}19 & 1.536{,}37 & 243{,}14 \\ 2.261{,}68 & 1.961{,}80 & 1.536{,}37 & 1.952{,}14 & 212{,}90 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Los números de la primera fila de (14) corresponden a la variedad Golden; los de la segunda, a la variedad Belleza de Roma; los de la tercera, a la variedad Starking, y los de la cuarta, a la variedad Stayman.

De acuerdo con la matriz [14], y teniendo en cuenta que estamos seleccionando los posibles planes entre cuatro variedades, las matrices A, X y B de la ecuación [11] son, respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 3.532{,}92 & 3.148{,}80 & 2.404{,}65 & 2.261{,}68 & 136{,}56 & 0{,}5 \\ 3.148{,}80 & 3.351{,}80 & 2.431{,}34 & 1.961{,}80 & 130{,}70 & 0{,}5 \\ 2.404{,}65 & 2.431{,}34 & 2.541{,}19 & 1.536{,}37 & 121{,}57 & 0{,}5 \\ 2.261{,}68 & 1.961{,}80 & 1.536{,}37 & 1.952{,}14 & 106{,}45 & 0{,}5 \\ 273{,}12 & 261{,}39 & 243{,}14 & 212{,}90 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \quad [16] \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E^* \\ 1 \end{bmatrix} \quad [17]$$

Sustituyendo en [11] A, X y B por [15], [16] y [17]; premultiplicando por A^{-1} y despejando X_1, X_2, X_3 y X_4, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0{,}0189353 \quad E^* - 4{,}3477705 \\ X_2 &= -0{,}0027853 \quad E^* + 0{,}6820502 \\ X_3 &= -0{,}0001728 \quad E^* + 0{,}5241443 \\ X_4 &= -0{,}0159772 \quad E^* + 4{,}1415760 \end{aligned} \quad [18]$$

Para cada valor que demos a *E* en [18], obtenemos un plan de variedades eficiente. Ahora bien, para $E^* = 244{,}87$, X_2 toma el valor cero. Es decir, que si queremos obtener una esperanza de rendimiento superior a 244,87, la segunda variedad, Belleza de Roma, debe excluirse del plan. Por tanto, el sistema [18] permite generar el conjunto de planes de variedades eficientes para valores de E^* menores de 244,87. Las siete primeras filas del cuadro núm. 5 nos dan la composición de siete planes de variedades eficientes, para valores de E^* comprendidos entre 230 y 245. Asimismo, la última columna de dicho cuadro proporciona la varianza del rendimiento para cada uno de los planes de variedades.

Para obtener planes eficientes con una esperanza de rendimiento superior a 244,87, eliminamos la segunda fila y la segunda columna de la matriz *A*, así como el segundo elemento de los vectores *X* y *B*. Sustituyendo en [13] $\tilde{A}^{-1}$ por la inversa de la matriz reducida de *A*; $\tilde{X}$ y $\tilde{B}$ por los vectores reducidos de *X* y *B*, y despejando X_1, X_3, X_4, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0{,}0171795 \quad E^* - 3{,}9178138 \\ X_3 &= -0{,}0011425 \quad E^* + 0{,}7615987 \\ X_4 &= -0{,}0160370 \quad E^* + 4{,}1562150 \end{aligned} \qquad [19]$$

Para $E^* = 259{,}16$, el elemento X_4 se hace cero. Por tanto, el sistema [19] permite generar el conjunto de planes de variedades eficientes para valores de E^* mayores de 244,87 y menores de 259,16. Las filas ocho, nueve, diez, once y doce del cuadro núm. 5 nos dan la composición de cuatro planes de variedades eficientes para valores de E^* comprendidos entre 247 y 257. Asimismo, la última columna de dicho cuadro nos da la varianza del rendimiento de cada uno de los planes.

Cuadro núm. 5

X_1 (1)	X_2 (2)	X_3 (3)	X_4 (4)	E_T (5)	V_T (6)	$E_T - D_T$ (7) (7) = (5) — $\sqrt{(6)}$
0,0060	0,0416	0,4850	0,4674	230	1.929,36	186,08
0,0454	0,0358	0,4840	0,4348	232	1.973,09	187,58
0,1020	0,0275	0,4835	0,3870	235	2.040,49	189,93
0,1399	0,0219	0,4832	0,3550	237	2.088,19	191,30
0,1967	0,0136	0,4827	0,3070	240	2.163,67	193,48
0,2346	0,0080	0,4823	0,2751	242	2.216,51	194,92
0,2910	0,0030	0,4817	0,2270	245	2.299,86	197,04
0,3255	—	0,4794	0,1951	247	2.357,77	198,44
0,3770	—	0,4760	0,1470	250	2.448,81	200,51
0,4114	—	0,4737	0,1149	252	2.512,24	201,88
0,4629	—	0,4703	0,0668	255	2.611,20	203,90
0,4793	—	0,4680	0,0347	257	2.679,90	205,23
0,6144	—	0,3856	—	260	2.850,86	206,61
0,6815	—	0,3185	—	262	2.942,52	207,76
0,7822	—	0,2178	—	265	3.101,44	209,31
0,8493	—	0,1507	—	267	3.221,58	210,24
0,9500	—	0,0500	—	270	3.423,26	211,49

Para obtener planes de variedades con un rendimiento superior a 259,16, eliminamos la tercera fila y la tercera columna de la matriz $\tilde{A}$, así como el tercer elemento de los vectores $\tilde{X}$ y $\tilde{B}$. Es decir, eliminamos a la variedad Stayman de la composición del plan. Repitiendo las operaciones matriciales anteriores y despejando X_1 y X_2 se obtienen las siguientes ecuaciones:

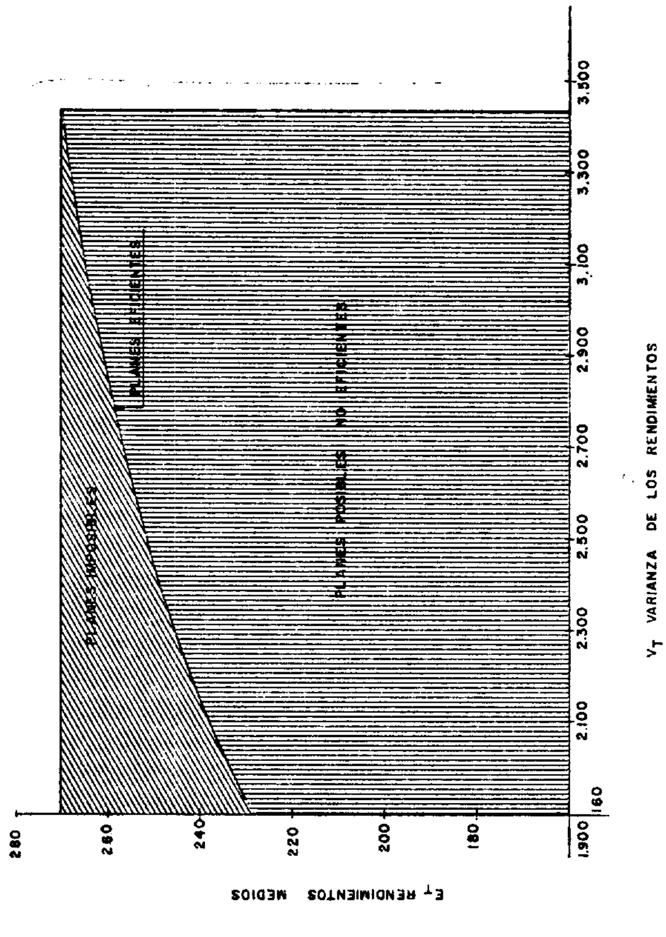
$$\begin{aligned} X_1 &= 0{,}335557 \quad E^* - 8{,}1100734 \\ X_3 &= -0{,}0335557 \quad E^* + 9{,}1100734 \end{aligned} \qquad [20]$$

El sistema [20] nos permite generar el conjunto de planes de variedades eficientes para valores de E^* superiores a 259,16. De esta manera obtenemos las cinco últimas filas del cuadro núm. 5, que corresponden a los planes de variedades eficientes de composición más arriesgada.

En la figura I se ha representado el conjunto de planes de variedades eficientes que separa el semiplano de los planes imposibles del semiplano de los planes posibles eficientes.

Figura 1

REPRESENTACION GRAFICA DEL COJUNTO DE PLANES DE VARIEDADES EFICIENTES, NO EFICIENTES E IMPOSIBES.



* * *

El método de MARKOWITZ deja indeterminado el problema de elegir el plan óptimo entre todos los planes eficientes (entendiendo por plan óptimo aquel que resulta más conveniente para el empresario en función de circunstancias particulares, tales como sus disponibilidades financieras, etc.). Un procedimiento para resolver esta indeterminación ha sido sugerido por McFARQUHAR (12). En lo que sigue, le explicaremos aplicándolo a nuestro caso concreto.

Supongamos que el empresario calcula el rendimiento mínimo para el cual resulta viable el cultivo. Es decir, calcula un rendimiento crítico E_{TO} por debajo del cual el cultivo produce pérdidas. Una vez calculado ese valor, el empresario está interesado en elegir un plan tal que asegure el cumplimiento de la siguiente condición: la probabilidad ∂ de que el rendimiento E_T sea inferior al rendimiento crítico E_{TO}, debe ser suficientemente pequeña. En lo sucesivo, se llamará *probabilidad de ruina* (*) a la probabilidad ∂. Se introduce así una condición del tipo:

$$E_T - \lambda D_T \geqq E_{TO} \qquad [21]$$

donde D_T representa la desviación típica del plan de variedades. El coeficiente λ depende de la distribución de probabilidad que sigan las variables aleatorias que miden los rendimientos de las diferentes variedades, así como del valor que se fije a la probabilidad de ruina ∂. En nuestra aplicación, se hace $\partial = 0{,}16$; es decir, la probabilidad de que el rendimiento obtenido por el plan de variedades no supere al rendimiento crítico E_{TO} debe ser del 16 por 100. Según la *hipótesis H_2* las variables aleatorias correspondientes a los rendimientos de las variedades que consideramos siguen distribuciones probabilísticas de tipo normal. Como es sabido, en una distribución normal de media E_T y desviación típica D_T, el 68 por 100 de la distribución está comprendido en el intervalo $[E_T - D_T\ ;\ E_T + D_T]$, el 16 por 100 está situado a la derecha de la abscisa $[E_T + D_T$ y el otro 16 por 100 a la izquierda de la abscisa $[E_T - D_T]$. Por tanto, en nuestro caso la abscisa λ toma el valor 1. Por lo que la condición de seguridad [21] se convierte en:

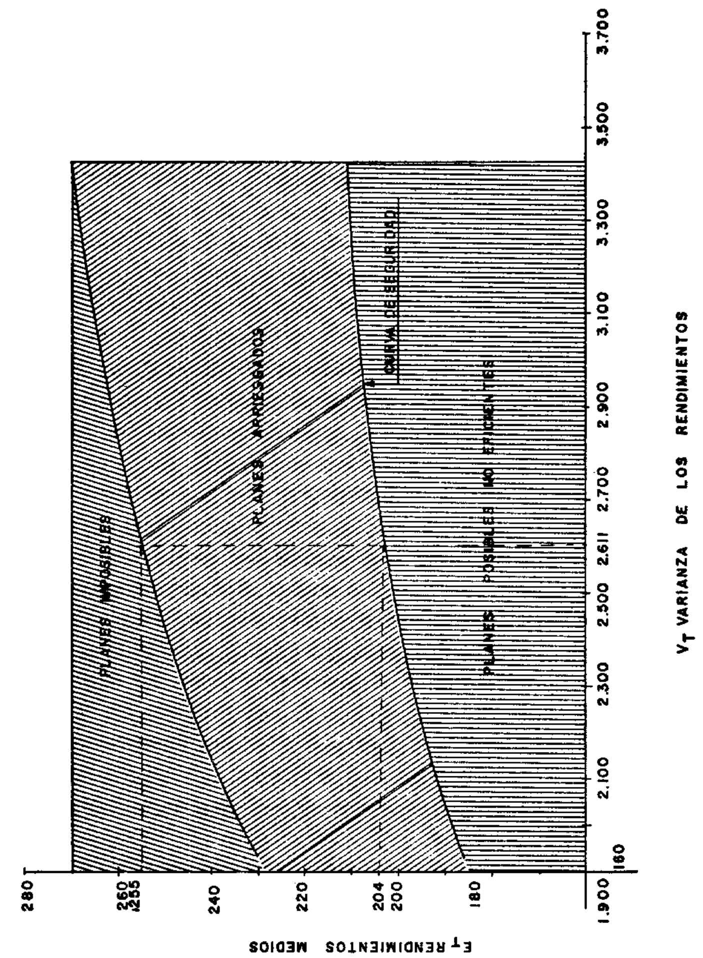
$$E_T - D_T \geqq E_{TO} \qquad [22]$$

En la figura II vienen representadas la curva de planes de variedades eficientes y la curva de seguridad dada por [22]. Las abscisas y las ordenadas de los diferentes puntos que forman la curva de seguridad figuran en las columnas (6) y (7) del cuadro núm. 5. A la vista de la figura II el empresario actúa de la siguiente manera:

(*) Sobre el concepto de probabilidad de ruina en la programación de actividades agrícolas, véase (4).

Figura II

REPRESENTACION GRAFICA DEL COJUNTO DE PLANES DE VARIEDADES ARRIESGADOS, POSIBLES NO EFICIENTES E IMPOSIBLES.



a) Establece el rendimiento crítico *Ero* por debajo del cual el cultivo produce pérdidas. Supongamos que Ero es igual a 204. Es decir, para no obtener pérdidas es necesario conseguir como mínimo un ingreso de 204.000 ptas/Ha. (*).

b) Determina el punto de corte de la curva de seguridad con la recta Ero = 204. La abscisa correspondiente a dicho punto

(*) En unidades monetarias del año 1966.

de corte representa la varianza del plan de variedades eficientes que debe elegir el empresario. Es decir, el empresario debe elegir el plan que tiene una varianza de 2.611,20. La figura indica inmediatamente el valor de la esperanza del rendimiento que corresponde a esa varianza, valor que resulta igual a 255 (*).

c) Por tanto, la composición del plan óptimo para el empresario viene dada por las columnas (1), (2), (3) y (4) de la undécima fila, que corresponde a la esperanza y varianza del apartado *b*). Es decir, si el empresario cultiva un 46,29 por 100 de la superficie con la variedad Golden, un 47,03 por 100 con la variedad Stayman, se asegura que en el período de plena producción, la probabilidad de obtener un rendimiento ingreso unitario por hectárea) inferior a 204.000 pesetas es sólo de 0,16.

El subconjunto de puntos del plano comprendidos entre la curva de planes eficientes y la curva de seguridad puede interpretarse como un subconjunto de planes arriesgados. Indudablemente, el conjunto de planes arriesgados depende de cual sea el valor que hallamos elegido para la probabilidad de ruina, puesto que esta probabilidad determina la curva de seguridad.

(1) AGRAWAL, R. C.; HEADY, E. O.: *Aplications of Game Theory Models in Agriculture,* «Journal of Agricultural Economics», mayo 1968, páginas 207-218.

(2) BALLESTERO, E.: *Principios de Economía de la Empresa,* Alianza Universidad, 3.ª edición, 1975.

(3) BOOT, J. C. G.: *Quadratic Programming.* North Holland Publishing Company, Rand McNally & Company, 1974.

(4) BOUSSARD, J. M.; PETIT, M.: *Representation of Farmers Behavior under Uncertainty with a Focus-Loss Constraint.* «Journal of Farm Economics», noviembre 1967, págs. 869-880.

(5) CORDONNIER, P.; CARLES, R.; MARSAL, P.: *Economía de la Empresa Agraria* (versión española de CASTILLA, J. L.). Mundi Prensa, 1973.

(6) DURÁN, J. M.: *Aplicaciones de la Teoría de Juegos a la Selección de Variedades de Manzanos en la Provincia de Lérida,* E. T. S. de Ingenieros Agrónomos de Madrid, Cátedra de Economía de la Empresa, 1975. Manuscrito sin publicar.

(7) FREUND, R. J.: *The Introduction of Risk into a Programming Model Econometrica,* julio 1956, págs. 253-263.

(8) LUCE, R. D.; RAFFA, H.: *Games and Decisions*. John Wiley and Sons, 1957.

(9) MARKOWITZ, H.: *Portfolio Selection*, «Journal of Finance», marzo 1952, págs. 77-91.

(10) MARKOWITZ, H.: *The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints*. Naval Research Logistic Quaterly, marzo-junio 1956, páginas 111-133.

(11) MARHOWITZ, H.: *Portfolio Selection* (Cowles Foundation, Monografía número 16), John Wiley and Sons, 1959.

(12) MCFARQUHAR: *Rational Decision Making and Risk in Farm Planning*, «Journal of Agricultural Economics», diciembre 1961, págs. 552-563.

(13) MCINERNEY, J. P.: *«Maximin Programming» An Approach to Farm Planning under Uncertainty*, «Journal of Agricultural Economics», mayo 1967, págs. 279-290.

(14) NIETO-OSTOLAZA, C.: *La Teoría de los Juegos y la Agricultura*, «Boletín del INIA», junio 1966, págs. 81-134.

(15) NIETO-OSTOLAZA, C.: *El Equilibrio Trigo-Cebada y la Teoría de los Juegos*, «Información Comercial Española», julio 1968, pág. 47-58.

(16) NIETO-OSTOLAZA, C.: *Problema de la adopción de decisiones frente a la incertidumbre en la Agricultura*, «Revista de Estudios Agro-Sociales», julio 1969, págs. 7-21.

(17) NIETO-OSTOLAZA, C.: *Algunas aplicaciones de la Teoría de los Juegos a la elección de variedades de trigo*, «Boletín del INIA», diciembre 1969, págs. 223-231.

(18) ROMERO, C.: *Modelos de selección de Carteras de Valores Bursátiles con aplicaciones a las Bolsas españolas*, «Revista de Economía Política», mayo 1974, págs. 65-103.

(19) WOLFE, P.: *The Simplex Method for Quadratic Progamming*, «Econométrica», julio 1959, págs. 382-398.

RESUMEN

En este artículo se adopta el modelo de MARKOWITZ referente a la selección de carteras de valores bursátiles, a la determinación de los posibles planes eficientes de variedades para un cierto cultivo. El modelo se aplica a la selección de un plan de variedades de manzanos en la provincia de Lérida. Las variedades consideradas son: Golden, Belleza de Roma, Starking y Stayman.

RÉSUMÉ

On adopte dans cet article le modèle de MARKOWITZ se rapportant à la sélection des valeurs boursières à la détermination des plans efficaces de variétés pour une certaine culture qui sont possibles. Le modèle s'applique au choix d'un plan de variétés de pommiers dans la province de Lérida. Les variétés examinées sont les suivantes: Golden, Belleza de Roma, Starking et Stayman.

SUMMARY

In this article, Markowitz's model for the selection of portfolios of securities on the Stock Exchange is adopted for determining the possible efficient plans of varieties for a certain crop. The model is applied to the selection of a plan of varieties of apples in the province of Lérida. The varieties considered are: Golden, Belleza de Roma, Starking and Stayman.