UN MODELO PARA DETERMINAR LA DIMENSION OPTIMA DE UNA CENTRAL LECHERA EN LA PROVINCIA DE ZARAGOZA

Por
JUAN DUEÑAS
Ingeniero Agrónomo (*)
CARLOS ROMERO
Doctor Ingeniero Agrónomo (**)

SUMARIO

I. INTRODUCCIÓN.

La primera cuestión que se plantea al tratar de determinar la dimensión óptima de una empresa afecta a la esencia misma de la definición de dimensión: el tamaño o dimensión de una empresa, ¿puede ser objeto de medición? En caso afirmativo, se plantea el problema de elegir las variables a las que se referirá la medición. Por ejemplo, la dimensión de una empresa podría medirse por el número de sus empleados de plantilla, por su cifra de ventas o bien simplemente por su capacidad de producción, función a su vez de su estructura tecnológica.

Una vez elegida la variable (o las variables) que definen la dimensión de la empresa, y suponiendo que podamos realizar mediciones precisas de todas las variables, surge un nuevo problema: el

(*) Diplomado en Gerencia y Dirección de Empresas Agrarias, por el Centro de Desarrollo Agrario del Ebro.
(**) Profesor Adjunto de Economía de la Empresa de la E. T. S. de Ingenieros Agrónomos, de la Universidad Politécnica de Madrid.

de calcular el óptimo de esa dimensión. Para calcular la dimensión óptima habrá que conocer previamente los objetivos económicos del empresario; es decir, habrá que precisar cuáles son sus móviles. Ahora bien, describir los móviles de los empresarios, tanto en su comportamiento a corto plazo como en su comportamiento a largo plazo, es una de las líneas de investigación de la Teoría Económica actual y uno de los temas más sujetos a una amplia discusión.

He aquí algunos conceptos alternativos de dimensión óptima de acuerdo con los distintos móviles del empresario:

a) Dimensión que maximiza el beneficio.
b) Dimensión que maximiza el volumen de ventas.
c) Dimensión que maximiza el beneficio o el volumen de ventas de la empresa, pero de forma tal que el índice de riesgo no sobrepase un cierto límite fijado.
d) Dimensión que minimiza los costes totales unitarios de la empresa.

Con vistas a las aplicaciones prácticas, el último concepto presenta una clara ventaja sobre los anteriores. Independiza la dimensión de la empresa del precio del producto, que es una de las variables económicas sujetas a mayor incertidumbre.

Un modelo de dimensión óptima según el criterio de minimización de costes totales unitarios de la empresa se debe al Profesor BALLESTERO (1). En este modelo, dimensión óptima y radio de acción comercial dan lugar a problemas correlativos. Los costes totales unitarios están integrados por los costes de funcionamiento y de transporte. El modelo es de aplicación a la determinación de la dimensión óptima de plantas industriales de transformación de materias primas tales como centrales hortofrutícolas, mataderos, almazaras, plantas embotelladoras, etc. Introduciendo en él ligeras modificaciones, su campo de aplicación puede ampliarse.

Nuestro trabajo tiene por objeto:

1.° Adaptar la estructura formal del modelo citado de dimensión óptima y radio de acción comercial a la estructura real del problema estudiado. Esta adaptación consiste en:

a) En el modelo citado se descompone el espacio de los consumidores en cuadrículas infinitesimales de área $dx\, dy$. En este trabajo

(1) Enrique BALLESTERO: *Principios de Economía de la Empresa*. Alianza Editorial. Madrid, 1971; págs. 427-37.

se descompone el espacio de los consumidores en círculos de radio infinitesimal $d\rho$. El centro de todos estos círculos se hace coincidir con la ubicación de la central lechera. Esta modificación se introduce por la razón de que de esta forma el modelo se adapta mejor al problema real estudiado.

b) Por otra parte, se trabaja con una función de consumo de tipo logístico y con una función de costes de funcionamiento de tipo cuadrático.

2.° Aplicar el modelo así adaptado a la determinación de la dimensión óptima y el radio de acción comercial de una central lechera en la provincia de Zaragoza.

II. Notación e hipótesis.

A lo largo de este trabajo se utilizará la siguiente notación:

R = radio de ventas de la central lechera.
$\gamma(\rho)$ = consumo de leche y derivados en un círculo de radio ρ cuyo centro coincide con el punto de ubicación de la central.
t = coste unitario de transporte.
r = distancia media a la que se transporta la leche y derivados desde la central.
q = cantidad de leche y derivados distribuídos por la central.
$C(q)$ = costes totales de funcionamiento de la central.

Las hipótesis de trabajo son:

a) Se supone ubicada la central en el casco urbano de Zaragoza.
b) Se supone que la central abastece sólo a los municipios de la provincia de Zaragoza, y no a los de provincias vecinas.
c) El espacio de los consumidores es un espacio continuo. Es decir, se considera que los consumidores se encuentran extendidos de modo continuo sobre la superficie del plano.
d) No existe discriminación espacial de precios para el producto. Es decir, el precio de venta del producto es el mismo para todos los municipios de la provincia.

III. El modelo.

El consumo de leche fresca y derivados en la zona de acción comercial de la central será igual a la cantidad tratada y distribuída por la central, es decir:

$$q = \gamma (R) \qquad [1]$$

La cantidad de leche fresca y derivados distribuídos a un pequeño círculo de radio $d\rho$ es:

$$\gamma' (\rho) \, d \rho \qquad [2]$$

El radio medio o distancia media de transporte es:

$$\bar{r} = \frac{\int_0^R \rho \, \gamma' (\rho) \, d \rho}{\gamma (R)} = f(R) \qquad [3]$$

Por tanto, la distancia media a la que se transporta la leche y derivados desde la central puede expresarse como una función de R.

La función de costes totales, suma de costes de funcionamiento y de transporte es, pues:

$$C (q) + t \cdot f(R) \cdot q \qquad [4]$$

La función de costes totales unitarios es:

$$\frac{C (q)}{q} + t \cdot f(R) \qquad [5]$$

Sustituyendo q en [5] por su valor [1] se obtiene, como función de costes totales unitarios, la expresión:

$$\frac{C [\gamma (R)]}{\gamma (R)} + t \cdot f(R) \qquad [6]$$

Ahora bien, los costes unitarios de funcionamiento son una función de R, es decir:

$$\frac{C [\gamma (R)]}{\gamma (R)} = g (R) \qquad [7]$$

Por lo que la función de costes totales unitarios de funcionamiento y transporte queda:

$$T(R) = g(R) + t \cdot f(R) \qquad [8]$$

El valor de R que hace mínimo [8] es el radio óptimo de ventas. La dimensión óptima se obtiene sustituyendo en [1] el valor de R correspondiente al radio óptimo de ventas.

Para realizar los cálculos referentes a [8] es necesario conocer las funciones $C(q)$ y $\gamma(\rho)$.

Para $C(q)$ se ha elegido como función que mejor se ajusta al fenómeno estudiado una función cuadrática (2):

$$C(q) = a_1 + a_2 q + a_3 q^2 \qquad [9]$$

Para $\gamma(\rho)$ se ha elegido como función que mejor se ajusta al fenómeno estudiado una curva logística (3):

$$\gamma(\rho) = \frac{y_0 \left(1 + e^{\frac{\beta - \rho}{\alpha}}\right) + K}{1 + e^{\frac{\beta - \rho}{\alpha}}} \qquad [10]$$

Por tanto, el consumo de leche y derivados en la zona de acción comercial de la central será:

$$q = \gamma(R) = \frac{y_0 \left(1 + e^{\frac{\beta - \rho}{\alpha}}\right) + K}{1 + e^{\frac{\beta - \rho}{\alpha}}} \qquad [11]$$

Diferenciando [10] se obtiene:

$$\frac{K}{\alpha} \frac{e^{\frac{\beta - \rho}{\alpha}}}{\left[1 + e^{\frac{\beta - \rho}{\alpha}}\right]^2} d\rho \qquad [12]$$

(2) Véase § 4.2.
(3) Véase § 4.1.

Sustituyendo en [3] $\gamma'(\rho)d\rho$ y $\gamma(\rho)$ por [11] y [12] resulta:

$$f(R) = \frac{\left[\int_0^R \frac{\rho e^{\frac{\beta-\rho}{\alpha}}}{\left[1+e^{\frac{\beta-\rho}{\alpha}}\right]^2} d\rho\right]\left(1+e^{\frac{\beta-R}{\alpha}}\right)}{y_0\left(1+e^{\frac{\beta-R}{\alpha}}\right)} \tag{13}$$

Se introduce el siguiente cambio de notación:

$$A = e^{\beta/\alpha}$$
$$B = e^{\frac{\beta-R}{\alpha}} \tag{14}$$

Integrando en [13] y teniendo en cuenta el cambio de notación [14] se obtiene como valor de $f(R)$:

$$f(R) = \tag{15}$$
$$= \frac{\left\{\frac{K\beta(A-B)}{(1+A)(1+B)} + K\alpha\left[\frac{\frac{\beta}{\alpha} A\left(e^{-\frac{R}{\alpha}} + \frac{R}{\beta} - 1\right)}{(1+A)(1+B)} + \ln\frac{1+A}{1+B} - \frac{R}{\alpha}\right]\right\}(1+B)}{y_0(1+B)+K}$$

Sustituyendo en [9] el valor de q dado por [11], dividiendo asimismo [9] por [11] y teniendo en cuenta el cambio de notación [14], se obtiene como expresión del coste unitario de funcionamiento:

$$g(R) = a_1 + a_2\left[\frac{y_0(1+B)+K}{1+B}\right] + a_3\left[\frac{y_0(1+B)+K}{1+B}\right]^{-1} \tag{16}$$

En notación abreviada, el coste total unitario de funcionamiento y transporte es, por tanto:

$$\mathrm{T}(R) = (16) + t \cdot (15) \tag{17}$$

El valor de R que hace mínimo [17] es el radio óptimo de ventas. La dimensión óptima se obtiene sustituyendo en [11] el valor de R correspondiente al radio óptimo de ventas.

IV. Aplicación del modelo (4).

4.1. *Determinación de la función de consumo.*

Se ha dividido la provincia de Zaragoza en una serie de círculos de consumo cuyo centro es la capital. Se ha tomado como intervalo de variación del radio entre dos círculos la longitud de 14 kilómetros (véase gráfico I). En el cuadro I figuran los consumos diarios de leche y derivados en cada uno de los círculos anteriores.

El cuadro I se ha confeccionado de la siguiente forma:

a) Se han clasificado los 304 municipios de la provincia de Zaragoza según sus diferentes niveles de renta *per capita* (5). El primer nivel agrupa los municipios cuya renta *per capita* no supera las 5.000 pesetas (comprende 56 municipios). El último nivel agrupa los municipios cuya renta *per capita* está comprendida entre 45.000 y 70.000 pesetas.

b) A cada nivel de renta corresponde un consumo diario *per capita* de leche y derivados (6). Así por ejemplo, para un nivel de renta comprendido entre 10.000 y 15.000 pesetas el consumo diario *per capita* de leche y derivados es de 180 gramos.

c) Para calcular el consumo diario de leche y derivados en un determinado municipio se operó de la siguiente forma. El nivel de renta del municipio nos determina su consumo diario *per capita;* por tanto, bastará multiplicar el consumo diario *per capita* por la población del municipio para obtener el consumo diario de ese municipio para la totalidad de la población.

Así por ejemplo, para obtener el consumo diario de leche y derivados en el municipio de Tarazona se operó de la siguiente forma. Como la renta *per capita* de Tarazona está comprendida entre 20.000 y 30.000 pesetas, le corresponde un consumo diario *per capita* de 240 gramos de leche y derivados. Multiplicando esta cantidad (240 gramos) por el número de habitantes del municipio (12.084 habitantes) (7), se obtiene un consumo diario de leche y derivados de 2.900 kilogramos para Tarazona.

---

(4) Nuestro agradecimiento al Ingeniero Agrónomo D. Ignacio Pomar Gomá, del gabinete de cálculo de la E. T. S. de Ingenieros Agrónomos de la Universidad Politécnica de Madrid, por la realización de cálculos numéricos contenidos en este apartado.

(5) Véase informe de BANESTO, 1967; págs. 231 y ss.

(6) Informe sociológico sobre la situación social de España, 1970. Madrid, Euramérica, 1970.

(7) Informe de BANESTO, 1967. Obra citada.

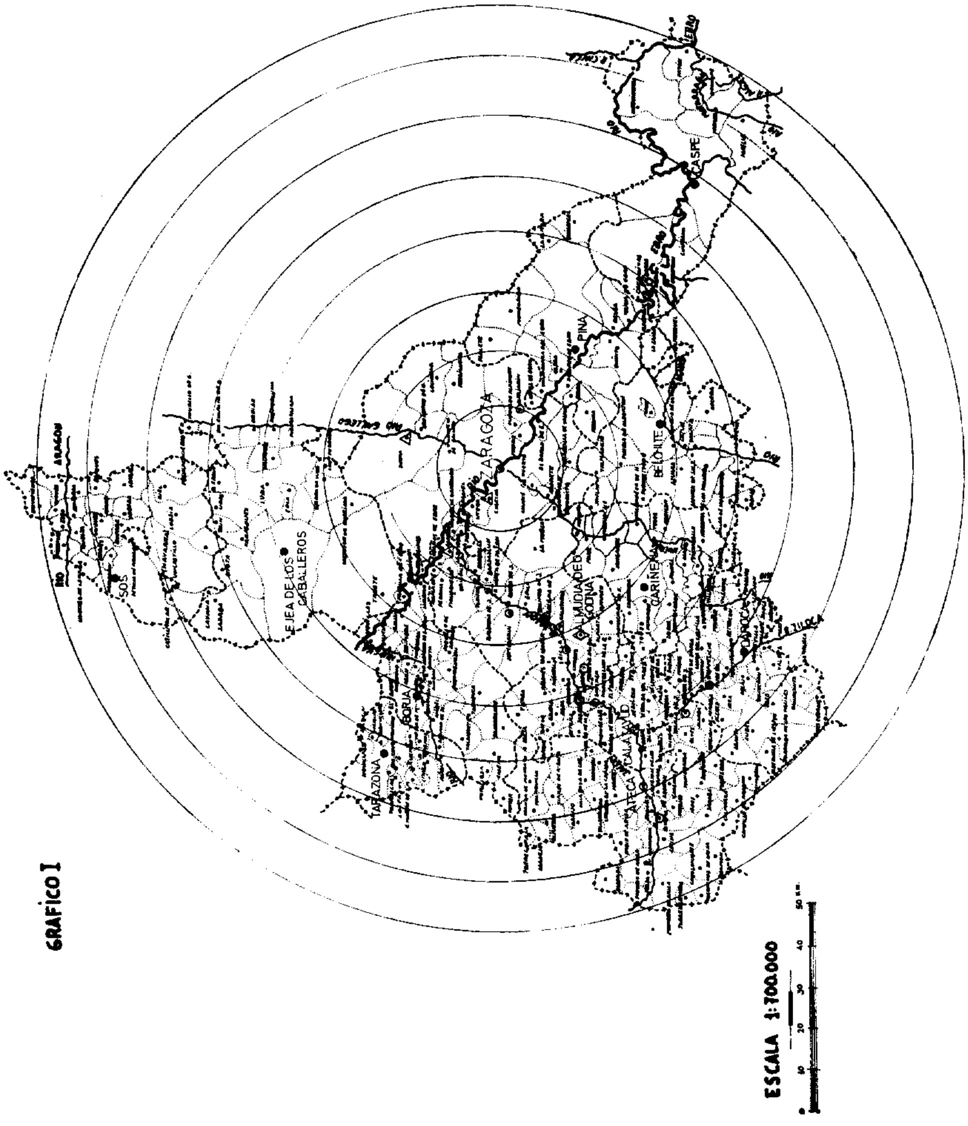
ZARAGOZA
CASPE
PINA
BELCHITE
CARIÑENA
EJEA DE LOS CABALLEROS
SOS
TARAZONA
BORJA
ATECA
CALATAYUD
ESCALA 1:700.000

GRÁFICO I

d) La columna (1) se obtuvo operando de la forma anteriormente descrita para cada uno de los municipios comprendidos en los círculos de consumo. En el gráfico I pueden verse los municipios comprendidos en cada uno de los círculos de consumo.

Ajustando por mínimos cuadrados la función [10], para la cual se utilizan las columnas (1) y (2) del cuadro I, se encuentra:

$$\gamma(\rho) = \frac{132{,}445\left(1 + e^{\frac{51{,}296-\rho}{16{,}266}}\right) + 57{,}318}{1 + e^{\frac{51{,}296-\rho}{16{,}266}}} \qquad [18]$$

curva que aparece representada en el gráfico II.

CUADRO I

(1) CONSUMO (Tm) $\gamma(\rho)$	(2) RADIO (Km) ρ	(3) INCREMENTOS DE CONSUMO
134,551	0	0
137,183	14	2,632
144,157	28	6,974
153,978	42	9,821
163,820	56	9,842
175,438	70	11,618
183,362	84	7,924
185,613	98	2,251
188,941	112	3,328

El coeficiente de correlación al cuadrado (coeficiente de determinación) que mide la bondad del ajuste anterior resulta ser:

$$r^2 = 0{,}99 \qquad [19]$$

por lo que el ajuste es altamente satisfactorio.

4.2. *Determinación de la función de costes totales de funcionamiento.*

Ajustando por mínimos cuadrados la función [9], para lo cual se utilizan las columnas (1) y (2) del cuadro II, se obtiene:

$$C(q) = 140{,}768 + 9{,}189\, q - 0{,}015\, q^2 \qquad [20]$$

cuya representación aparece en el gráfico III.

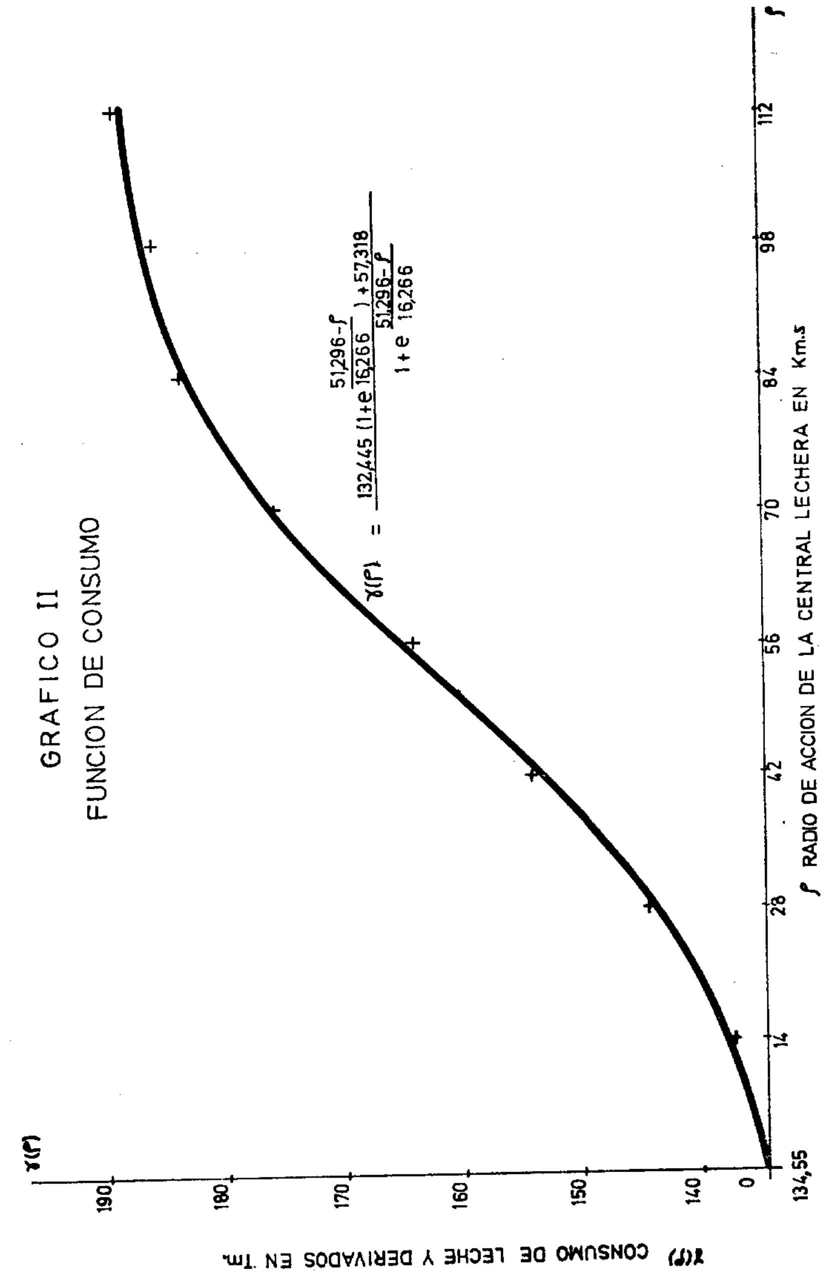
GRAFICO II
FUNCION DE CONSUMO
γ(ρ) = 132,445 (1+e (51,296-ρ)/16,266) + 57,318 / 1+e (51,296-ρ)/16,266
γ(ρ) CONSUMO DE LECHE Y DERIVADOS EN Tm.
ρ RADIO DE ACCION DE LA CENTRAL LECHERA EN Km.s
190
180
170
160
150
140
0
134,55
14
28
42
56
70
84
98
112
ρ
γ(ρ)

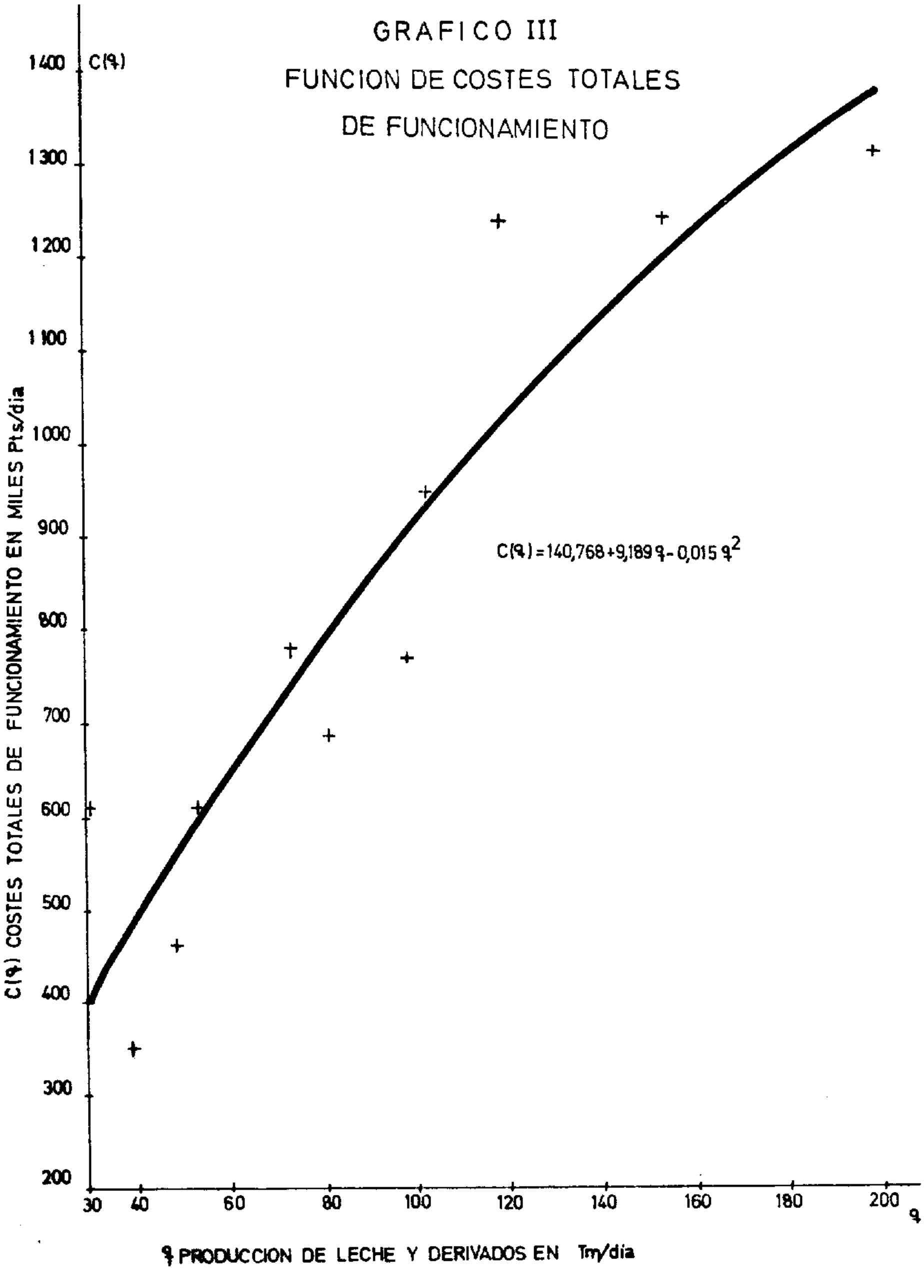
GRAFICO III
FUNCION DE COSTES TOTALES
DE FUNCIONAMIENTO
C(q)
C(q) = 140,768 + 9,189 q - 0,015 q²
C(q) COSTES TOTALES DE FUNCIONAMIENTO EN MILES Pts/dia
q PRODUCCION DE LECHE Y DERIVADOS EN Tm/dia
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400
30
40
60
80
100
120
140
160
180
200
q

La bondad del ajuste es aceptable, ya que:

a) El coeficiente de determinación $r^2 = 0{,}86$ es alto.
b) El coeficiente $a_2 = 9{,}189$ con una desviación típica $\sigma(a_2) = 3{,}648$ resulta significativo al 5 por 100.
c) El coeficiente $a_3 = -0{,}015$ con una desviación típica $\sigma(a_3) = 0{,}016$ resulta significativo al 30 por 100.

CUADRO II

(1) Costes totales (miles pts./días) $C(q)$	(2) Capacidad de la Central (Tm./día) q
1.242	155
770	100
781	75
611	55
1.238	120
465	50
686	83
353	40
611	30
948	104
1.314	200

Fuente: Elaboración propia. Los datos se obtuvieron a partir de diferentes proyectos de centrales lecheras.

4.3. *Determinación del radio óptimo de ventas.*

La función económica para estimación de los costes unitarios de funcionamiento y transporte se obtiene sustituyendo en la expresión [17] los parámetros

$$a_1, a_2, a_3, K\ \beta, \alpha, y_0, A = e^{\beta/\alpha} \quad \text{y} \quad B = e^{\beta/\alpha}$$

por sus valores obtenidos mediante ajuste estadístico en las expresiones [18] y [20]. Estos valores son:

a) Los coeficientes de regresión de la función cuadrática:

$$a_1 = 140{,}768; \quad a_2 = 9{,}189; \quad a_3 = -0{,}015$$

b) Los coeficientes de la curva logística:

$$K = 57{,}318; \quad \beta = 51{,}296; \quad \alpha = 16{,}266; \quad y_0 = 132{,}445$$

c) Los coeficientes del cambio de notación:

$$A = e^{\frac{51{,}296}{16{,}266}}\ ; \quad B = e^{\frac{51{,}296 - R}{16{,}266}}$$

Para diferentes valores de t (coste unitario de transporte) se han calculado los valores de R que hacen mínima la función económica anterior. Estos valores de R son los radios óptimos de ventas para la central en función de t.

Para los valores de t usuales en el mercado se ha encontrado que los radios óptimos de ventas son superiores al radio del círculo que cubre toda la provincia de Zaragoza (112 kilómetros).

V. Conclusiones.

Las principales conclusiones que se desprenden de este trabajo son las siguientes:

a) Para las cifras de costes unitarios de transporte usuales en el mercado, la función económica que mide los costes unitarios totales de funcionamiento y transporte va tomando valores cada vez más pequeños a medida que aumenta el radio de ventas. Ello significa que el radio óptimo de ventas de una central lechera localizada en el casco urbano de Zaragoza cubre a toda la provincia. Sería, pues, aconsejable que la central abasteciera incluso a localidades situadas en provincias vecinas.

b) Para que el radio de ventas de la central cubra a toda la provincia, la capacidad de tratamiento (dimensión) de la central ha de ser de unas 190 toneladas diarias. Se llega así a la conclusión de que el *óptimo técnico* en centrales lecheras para una distribución del consumo similar a la estudiada (muy concentrada en un punto, en este caso la capital) se encuentra muy por encima de las 190 toneladas diarias correspondientes a la provincia de Zaragoza.

c) Se ha calculado el coste unitario de transporte para el cual el radio óptimo de ventas de la central no cubre ya a toda la provincia. Así, para $t = 55$ ptas./tm. y km. (cifra muy superior a los costes usuales de transporte) el radio óptimo de ventas es de 70 kilómetros.

A esta cifra corresponde una dimensión de 176 toneladas diarias para la central.

RESUMEN

Partiendo de un modelo de dimensión óptima y radio de acción comercial, se ha obtenido el radio óptimo de ventas de una central lechera bajo las siguientes hipótesis:

a) La función de consumo se ajusta a una curva logística.

b) Los costes totales de funcionamiento de la central se ajustan a una función cuadrática.

Se ha aplicado el modelo a la determinación del radio óptimo de ventas de una central lechera ubicada en la ciudad de Zaragoza y planeada para el abastecimiento de dicha ciudad y de los pueblos de la provincia.

RÉSUMÉ

En partant d'un modèle de dimension optimale et d'un rayon d'action commerciale, on a obtenu le rayon optimal des ventes d'une centrale laitière dans les hypothèses suivantes:

a) la fonction de la consommation suit une courbe logistique,

b) les coûts totaux de fonctionnement de la centrale suivent une fonction quadratique.

On a appliqué le modèle pour la détermination du rayon optimal des ventes d'une centrale laitière située dans la ville de Saragosse et prévue pour l'approvisionnement de la ville et des villages de la province.

SUMMARY

Starting from a model of optimum dimensions and commercial radius of action, the optimum radius of sales has been obtained for a dairy centre, on the following assumptions:

a) The consumption function conforms to a logistic curve.

b) The total costs of functioning of the centre conform to a quadratic function.

The model has been applied to the determination of the optimum radius of sales of a dairy centre situated in the city of Saragossa and planned for the supplying of that city and of the villages in the province.