PROGRAMACION DE EXPLOTACIONES AGRICOLAS

Por

EMILIO GOMEZ MANZANARES

Doctor Ingeniero Agrónomo

Este trabajo consta de dos partes: una primera parte dedicada a una breve exposición de la teoría de la programación agrícola, especialmente en lo que se refiere a sus aspectos microeconómicos, y una segunda parte de aplicación de la teoría al caso de las explotaciones agrícolas de la zona de La Violada.

I.—TEORIA DE LA PROGRAMACION AGRICOLA

1. Introducción.

La necesidad de programar las actividades económicas se ha sentido siempre en el curso de la historia de la Humanidad. No es difícil encontrar numerosos ejemplos de programación que datan de hace varios siglos y aun milenios. Sin embargo, es en los veinte últimos años que los estudios de programación se han desarrollado más, coincidiendo con una mayor conciencia pública de las ventajas de la planificación económica, aliada al descubrimiento de nuevas técnicas matemáticas que permiten realizarla con un menor grado de empirismo y un mayor rigor.

Pues, en efecto, la programación que se había venido realizando hasta la época actual pecaba de excesivo empirismo y, sobre todo, de excesiva simplificación de la realidad. Faltos del aparato matemático necesario para manejar la enorme cantidad de parámetros e incógnitas que presenta cualquier realidad económica, los planificadores de antaño mutilaron la realidad, simplificándola en exceso, para poder así manejar un pequeño número de datos valiéndose de simples procedimientos aritméticos. La aplicación del análisis infinitesimal, por otra parte, permitía obtener vistosas ecuaciones representativas del equilibrio general o de las condiciones del máximo bienestar o utilidad, etc., que, por otra parte, satisfacían únicamente las exigencias del teórico, ya que no las del planificador, que no veía la manera de aplicarlas en una situación concreta.

La gran revolución en el terreno de la planificación económica ha tenido lugar bien avanzado el siglo XX con el desarrollo de ramas más modernas de las matemáticas, tales como el análisis vectorial y el álgebra matricial, la lógica simbólica, el cálculo de probabilidades, la teoría de conjuntos y, en particular, de todas aquellas técnicas que forman parte de la llamada investigación operativa (teoría de juegos de estrategia, programación lineal, programación cuadrática, programación dinámica, teoría de líneas de espera, análisis secuencial, control de inventarios, teoría de la información, procesos estocásticos y cadenas de Markov, etc.).

Las aplicaciones de las matemáticas modernas a las ciencias sociales y a la biología son ya innumerables. Así, por ejemplo, la construcción de tablas de verdad puede ayudar al gran empresario a tomar una decisión apropiada en una situación compleja, o la teoría de líneas de espera puede dar una solución al problema de encontrar el número óptimo de cajas (y cajeras) a situar en un supermercado; las matrices de permutación pueden servir para determinar las reglas matrimoniales en una sociedad primitiva, etcétera.

Paralelamente a este desarrollo de la teoría en lo que se vienen llamando matemáticas modernas, surge el auxiliar indispensable de las calculadoras electrónicas: computadores digitales y analógicos. Estas permiten hoy en día manejar, con gran economía de tiempo y de personal, una ingente cantidad de datos, haciendo posible la resolución de modelos inmensos que incluyen una gran parte de los factores que entran en juego en una situación real.

2. Las distintas fases de la programación.

Todo estudio completo de programación debe comportar los siguientes pasos:

a) Determinación del objetivo u objetivos del programa.
b) Restricciones impuestas por el medio en que operamos, por las disponibilidades de recursos necesarios, por la naturaleza técnica de los procesos considerados, o por la voluntad de la autoridad planificadora.
c) Formulación matemática del problema.
d) Resolución teórica del modelo matemático (gráfica y analítica).
e) Determinación de los parámetros necesarios (según las distintas hipótesis que se consideren).
f) Resolución práctica del modelo (con frecuencia, mediante el empleo de calculadoras electrónicas).
g) Interpretación económica de los resultados.

De todos estos puntos nos ocupamos a continuación; de *a)* a *d)* en esta primera parte del trabajo, y de *e)* a *g)* en la segunda parte.

3. La programación de explotaciones agrícolas.

Dejando para otra ocasión los estudios de programación de porte macroeconómico (1), nos ocuparemos ahora con detalle de la programación al nivel de la empresa agrícola.

De pasada solamente mencionaremos algunas de las técnicas que han venido utilizándose, y que se utilizan aún en un gran número de países, para determinar, por procedimientos más o menos empíricos, los planes de producción de las explotaciones agrícolas.

No vamos a tratar de algunas técnicas, de uso relativamente frecuente en algunos países centroeuropeos, que determinan los planes de producción de las explotaciones partiendo de consideraciones puramente agronómicas, tales como la vocación natural del suelo y en las que la producción animal viene automáticamente determinada por las disponibilidades de alimentos producidos en la explotación. Nos interesan únicamente los programas económicos donde las consideraciones de orden técnico son tenidas en cuenta, pero siempre subordinadas a los objetivos económicos.

De uso frecuente es la técnica que los anglosajones llaman *budgeting*, que, en esencia, no es otra que el análisis parcial o

(1) El autor ha trabajado, dentro de las actividades operacionales de la O. C. D. E., en la elaboración de varios modelos matemáticos de programación de la producción agrícola a la escala nacional e internacional.

método de sustitución, donde se interpretan en términos económicos distintas modificaciones al plan actual de producción. Las modificaciones pueden limitarse a la ampliación de una especulación (mayor superficie dedicada al cultivo de un determinado producto o aumento del número de cabezas de ganado en la explotación) y consiguiente reducción o supresión de otras, o bien pueden afectar en mayor medida a la organización actual de la explotación, introduciendo nuevas especulaciones y distintas técnicas de producción. Varios planes, comportando modificaciones más o menos radicales al plan actual de producción, pueden compararse en función de los resultados económicos, las inversiones de capital que se precisarán, el mayor o menor riesgo que tales modificaciones representan, etc., sin olvidar, naturalmente, cuando se trata de aconsejar al agricultor, las preferencias que éste manifieste. La técnica del *budgeting,* que comenzó en los orígenes de la economía agrícola empleándose en estudios de investigación, quedó relegado su empleo a los trabajos de extensión agraria, habiendo sido reemplazada en numerosos países, total o parcialmente, por otras técnicas de que hablaremos a continuación. La aplicación de esta técnica exige, por parte del planificador, un gran conocimiento de la realidad agrícola de la explotación que trata de programar, y una cierta dosis de imaginación. Su utilidad depende del número de programas que se preparen, que permitirá escoger de entre ellos el más conveniente. Su mayor ventaja, en lo que se refiere a su empleo en el trabajo de extensión, estriba en la sencillez de los supuestos en que se basa, y que permite, en general, al agricultor seguir el razonamiento del programador e intervenir activamente, corrigiendo, cuando se haga necesario, las cifras de que aquél se vale para mejor adaptarlas a las posibilidades de su explotación. Para facilitar el empleo del *budgeting* por los agentes de Extensión Agraria, la mayor parte de los países que lo utilizan han editado manuales llamados de gestión, donde figuran clasificadas por regiones agrícolas y sistemas de producción las «normas» o cifras medias a emplear relativas a rendimientos de los cultivos y ganado, necesidades de mano de obra, gastos directos de cada especulación, etc.

Las técnicas modernas de programación que, al menos en lo que se refiere a su utilización en el trabajo de extensión agraria, han suplantado en gran medida al *budgeting*, presentan la ventaja sobre éste de su carácter más objetivo, que hace que puedan emplearse por distintas personas con resultados análogos. Sin duda alguna, son técnicas inspiradas más o menos de la programación lineal, de la cual nos ocuparemos con mucho mayor detenimiento más adelante.

A este grupo pertenecen el método conocido actualmente con el infortunado nombre de *programme planning* y el utilizado en Suecia con el nombre de *resultatmaximering i lantbruket.* Ambos constituyen un intento de llegar, siguiendo un procedimiento sistemático de selección de las distintas actividades, al establecimiento de programas de producción satisfactorios. El llamado *programme planning,* método originario de Estados Unidos y transplantado a Europa a partir de 1957 (2), ha conocido una gran difusión en el norte de Europa, especialmente en el Reino Unido, donde constituye en la actualidad práctica corriente en el trabajo del agente de Extensión. Se comienza por establecer un inventario lo más completo posible de las distintas especulaciones que podrían darse en la explotación (cultivos y clases de ganado) y se determinan los beneficios brutos unitarios relativos a cada especulación, entendiendo por tales la diferencia entre el valor de la producción unitaria que cabría esperar en la explotación y los gastos directos de la especulación en cuestión. Entonces, con el conocimiento de las características «fijas» de la explotación (superficie, mano de obra disponible, etc.) se determina, *a priori,* el factor limitante, es decir aquél susceptible de frenar antes el nivel de los beneficios que se esperan como consecuencia de la puesta en práctica de las distintas especulaciones. Supongamos que tratamos de programar, siguiendo este método, una explotación que, teniendo en cuenta la mano de obra disponible (explotante y miembros de su familia; obreros fijos, si los hubiera) y el capital disponible (en forma de construcciones, maquinaria, etc., y en forma líquida), nos parece de reducidas dimensiones. Estableceremos, por lo tanto, como hipótesis inicial que la superficie de la explotación constituye el factor limitante. Ordenaremos, a continuación, las distintas especulaciones con arreglo a los beneficios unitarios por hectárea, de mayor a menor. Si la superficie es el factor limitante, nos interesarán sobre todo aquellas especulaciones que propor-

(2) El autor formó parte de la Misión europea de la antigua O. E. C. E. que fué enviada a Estados Unidos en 1957 a estudiar los métodos americanos en materia de gestión de explotaciones, en el curso de la cual "descubrimos" el mal llamado *programme planning* en la Universidad de Minnesota. Véase la publicación de la AEP/OECE *Farm Management in the United States*, en la cual colaboró el autor.

cionen el máximo beneficio por hectárea; empezamos, pues, dedicando la mayor superficie posible al cultivo número 1 en nuestra lista. Supongamos que por imperativos agronómicos no convenga sobrepasar de cierto límite la superficie dedicada a tal cultivo; continuaremos, por lo tanto, con la especulación núm. 2, hasta agotar sus posibilidades; después la núm. 3, etc., hasta agotar la superficie útil disponible de la explotación. Esto nos da un programa inicial; verificamos entonces cuáles son las necesidades en mano de obra de tal programa y comparamos con las disponibilidades. Si las primeras son menores o sensiblemente iguales que éstas, entonces el programa calculado es, sin duda alguna, el óptimo. Lo probable, sin embargo, es que las necesidades en mano de obra del programa inicial superen a las disponibilidades de la explotación. Entonces comienzan los reajustes. Clasificamos las especulaciones con arreglo al beneficio unitario que proporcionan por jornada de trabajo empleada en su producción, de mayor a menor. Sustituímos la última especulación que habíamos incluído en el programa inicial, por la núm. 1 de la nueva lista de especulaciones; continuamos las sustituciones hasta obtener un programa que satisfaga las disponibilidades de mano de obra y, naturalmente, de superficie. Empezando nuestra selección de especulaciones por aquellas que hacen máximos los beneficios brutos por unidad de trabajo empleado, y procediendo en forma semejante, con los consiguientes reajustes al final, obtendríamos otro programa que satisface también las limitaciones existentes en la explotación (disponibilidades limitadas de recursos, imperativos de orden técnico). Las distintas formas en que hagamos los reajustes nos proporcionan distintos programas, de entre los que podremos escoger el más conveniente en el caso concreto que nos ocupa (3).

El método es valioso como medio a emplear por el agente de Extensión para la educación del agricultor y para introducirle, especialmente, en el razonamiento económico. Como técnica de investigación nos parece bastante limitada, y desde luego para ser aplicada con cierto realismo exige exactamente el mismo tipo de información que otros métodos más rigurosos. La variante sueca

(3) Podríamos, sin duda, aclarar más el funcionamiento del *programme planning* con la ayuda de un ejemplo concreto, pero no es nuestra intención en este trabajo ocuparnos con detalle de los métodos no-matemáticos de programación, por lo que preferimos referir al lector interesado en el método a la publicación de la O. C. D. E. *The programme planning*, núm. 45 de la serie "Documentación en Agricultura y Alimentación", de la citada Organización.

se basa esencialmente en el mismo tipo de razonamiento, es decir, en la utilización intensiva de las especulaciones que dan el mayor beneficio por unidad de factor limitante, pero supera al *programme planning* en el número de programas que establece en cada caso, en riqueza de hipótesis, tiene más en cuenta la realidad de la explotación concreta a programar y, sobre todo, la habilidad y capacidad de gestión del explotante (4).

Olvidémonos ahora de tales técnicas y consideremos el problema en sus rasgos esenciales. Se trata, en suma, de elaborar un programa de producción para la explotación que dé los mejores resultados económicos, compatible con las disponibilidades existentes de los distintos recursos (superficie y naturaleza del suelo, mano de obra, capital, edad y características del explotante, etc.) y con los imperativos que impone la técnica agrícola (rotaciones de cultivo, equilibrio producciones forrajeras-ganado en la explotación, etc.). Así expuesto el problema surge inmediatamente a la mente la idea de traducir tal objetivo al lenguaje matemático. Un primer intento, con un loable afán de simplificar ligeramente la realidad para poder aplicar técnicas matemáticas de manejo sencillo y, sobre todo, susceptibles de resolución con ayuda de computadores electrónicos, es la conversión del problema en un problema de programación lineal.

4. La programación lineal.

La técnica conocida con el nombre de «programación lineal» surgió por primera vez al final de la segunda guerra mundial, en Estados Unidos, cuando el matemático Dantzig resolvió el problema de obtener los valores no negativos que hacen máxima o mínima una función lineal de n variables cuando existen simultáneamente una serie de desigualdades o inecuaciones también lineales a que deben de satisfacer las variables en cuestión. La programación lineal, que, como tantas otras técnicas de la investigación operativa, se aplicó inicialmente a las operaciones militares, pasó rápidamente, al terminar la segunda guerra mundial, a aplicarse

---

(4) El método utilizado en Suecia, al que nos hemos referido brevemente, ha sido objeto de la publicación *Resultat maximering i lantbruket*, editada por el Instituto de Economía Rural de Estocolmo, de la que existe una traducción francesa con el título *Recherche du revenu le plus élevé en Agriculture*, Centre National de Comptabilité et d'Economie Rurale, Paris, 1959.

en el mundo civil para resolver problemas industriales primeramente, y desde hace unos ocho años viene utilizándose con creciente éxito para resolver distintos problemas del dominio agrícola relativos al fenómeno de la producción y distribución. Sus aplicaciones en la agricultura son variadas, desde la programación de explotaciones o búsqueda del plan óptimo de explotación, determinación de raciones alimenticias de coste mínimo, etc., hasta el estudio del transporte de un determinado producto de las zonas de producción a los centros de consumo, de forma que el coste total de transporte sea mínimo (problema especial resuelto con la ayuda del llamado «modelo de transporte»). Actualmente su aplicación más frecuente en los trabajos de economía agrícola de carácter macroeconómico, a la escala regional, nacional o internacional, lo constituye su empleo en la resolución de los problemas que ocasiona la llamada «concurrencia interregional», concepto que incluye las ventajas comparativas y otros factores que condicionan la localización óptima de las producciones agrícolas en el interior de una gran zona geográfica.

Pero como son sus aplicaciones microeconómicas, al nivel de la empresa (la explotación agrícola, en el caso que nos ocupa), las que nos interesan en este trabajo, comenzaremos por dar una idea intuitiva de lo que representa la programación lineal resolviendo un caso sencillo relativo a una explotación agrícola, sin perjuicio de tratar más adelante el caso general en toda su amplitud y con el debido rigor matemático.

Supongamos una explotación agrícola de 10 hectáreas de superficie, con 600 jornadas de trabajo disponibles, correspondientes al pleno empleo de dos personas, el explotante y un miembro de la familia. No existen limitaciones de capital (al menos en los límites impuestos por la superficie y la mano de obra disponible), ni imperativos agronómicos que limiten la superficie a destinar a cada cultivo; es decir, las 10 hectáreas pueden dedicarse a un solo cultivo si éste resulta ser el más ventajoso. Hemos escogido dos limitaciones solamente, la superficie y el trabajo anual disponible, con objeto de representar el problema gráficamente.

Consideremos las siguientes especulaciones como posibles en la explotación en cuestión: trigo, cebada, maíz, remolacha, alfalfa, vacas lecheras y cerdas de cría. Supongamos que obtenemos los beneficios brutos unitarios de cada especulación (diferencia entre el valor unitario de la producción y los gastos directos) y que conocemos, por otra parte, las exigencias de cada especulación en jornadas de trabajo. En el caso de las vacas y de los cerdos, consideremos las especulaciones vacas-alfalfa y cerdos-alfalfa, es decir, asignemos a cada vaca (lo mismo a cada cerda de cría) una superficie de alfalfa capaz de proporcionarle el alimento en este forraje necesario durante el año, que figurará, por otra parte, valorado en los gastos directos a precio de coste; asimismo, la mano de obra requerida por el cultivo de la alfalfa correspondiente a cada cabeza de ganado figurará añadida a la directamente utilizada en el cuidado de aquél. Aclaremos que se trata de una explotación de regadío.

Los datos que necesitamos, pues, son los que figuran en el siguiente cuadro:

Especulaciones	Unidad	Beneficio unitario (pts.)	Exigencias en jornadas de trabajo	Exigencias en superficie (has.)
A_1 = Trigo	1 Ha.	9.679	5,25	1
A_2 = Cebada	1 Ha.	6.889	5,25	1
A_3 = Maíz	1 Ha.	10.031	44,85	1
A_4 = Remolacha ...	1 Ha.	26.360	64,45	1
A_5 = Vacas	1 A.	10.881	43,07	0,22
A_6 = Cerdos	1 A.	3.031	23,59	0,02

en el cual se aprecia que por cada vaca lechera es necesario cultivar 0,22 hectáreas de alfalfa, y 0,02 hectáreas de alfalfa por cada cerda madre.

El problema a resolver es el de determinar el programa óptimo de producción en la explotación que estudiamos, conociendo los datos del cuadro anterior (perfectamente calculables para la explotación) y sabiendo que la explotación tiene una superficie de 10 hectáreas y unas disponibilidades de 600 jornadas de trabajo. Naturalmente, el plan óptimo es el que representa el mayor beneficio bruto total, supuestas satisfechas las condiciones impuestas por la existencia de algunos recursos (tierra y trabajo) en cantidad limitada.

Para resolver este sencillo problema en forma gráfica vamos a hacer una ligera transformación del cuadro anterior. En efecto, hagamos los datos del cuadro citado comparables en lo que se refiere al beneficio bruto obtenido por cada especulación. Por ejemplo, determinemos cuáles serían las necesidades de trabajo y de superficie correspondientes a cada especulación para obtener siempre un beneficio bruto de 50.000 pesetas. Por simple regla de tres obtenemos los valores correspondientes que figuran en el siguiente cuadro:

Especulaciones	Exigencias en jornadas de trabajo para obtener un beneficio bruto de 50.000 pts.	Superficie necesaria para obtener 50.000 pts. de beneficio bruto (has.)
A_1 = Trigo	27,25	5,20
A_2 = Cebada	38,10	7,40
A_3 = Maíz	224,00	5,00
A_4 = Remolacha .	122,50	1,90
A_5 = Vacas	198,00	1,00
A_6 = Cerdos	390,00	0,35

Representemos gráficamente los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_6$ por medio de sus coordenadas: la superficie medida en el eje de abscisas y las jornadas de trabajo en el de ordenadas (Fig. 1).

Inmediatamente surge a la vista que, independientemente de las disponibilidades de trabajo y de superficie, las especulaciones A_2 y A_3 no podrán figurar en el programa óptimo, pues para un mismo beneficio (50.000 pesetas) exigen más superficie y más jornadas de trabajo (basta comparar A_2 con A_1, y A_3 con A_4 o con A_5). Quedan, pues, como posibilidades A_1, A_4, A_5 y A_6 (trigo, remolacha, vacas y cerdos, respectivamente). Si unimos cada uno de estos puntos con el origen y prolongamos hasta cortar a las dos paralelas a los ejes que representan las disponibilidades totales de los dos recursos considerados (tierra y trabajo), obtendremos los puntos A'_1, A'_4, A'_5 y A'_6. La interpretación de estos puntos es la siguiente: el punto A'_5, relativo a la especulación vacas lecheras, significa el empleo de las 600 jornadas de trabajo en el cuidado de 600/43,07 = 14 vacas lecheras dedicando unas 3 hectáreas de superficie a la alfalfa y dejando sin cultivar las 7 hectáreas restantes. El beneficio a esperar de tal proceder sería igual a $50.000 \times \dfrac{OA'_5}{OA_5}$, o, de otro modo, $14 \times 10.881 = 152.334$ pesetas.

En general, el beneficio a esperar de cualquier especulación A_i llevada hasta la utilización máxima que permitan las limitaciones impuestas por las disponibilidades de tierra y de mano de obra viene dado por:

$$b_i = 50.000 \times \frac{OA'_i}{OA_i} \quad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

Es fácil ver en la figura 1 que la especulación susceptible de dar un mayor beneficio es A_4, es decir, la remolacha. Sin embargo, si tenemos en cuenta que P representa una combinación de A_4 y A_1 que da también 50.000 pesetas de beneficio, es fácil ver que el beneficio máximo viene dado por P', intersección de las dos rectas limitantes de tierra y trabajo. En efecto, el beneficio obtenido es igual a $50.000 \times \frac{OP'}{OP}$. Utilizando, pues, las especulaciones trigo y remolacha de manera que agotemos las disponibilidades de ambos recursos limitados (la tierra y el trabajo), obtendremos el máximo beneficio posible en las condiciones de la explotación, beneficio que fácilmente puede calcularse en

RESOLUCION GRAFICA DE UN PROGRAMA LINEAL

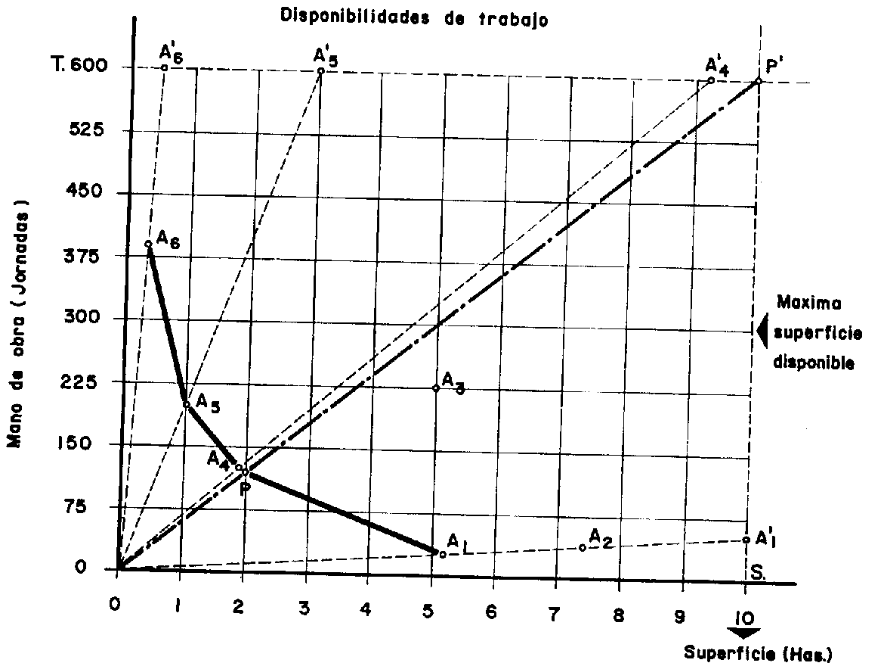

Figura 1

250.000 pesetas (en efecto, P representa 2 hectáreas y 120 jornadas, es decir, un quinto justo de las disponibilidades de recursos).

Resumiendo, pues, bastará trazar la línea quebrada A_1, A_4, A_5 y A_6, y, por otra parte, unir el origen con el punto P' de intersección de las rectas limitantes; el punto de intersección de esta recta que parte del origen con la línea quebrada nos proporciona la combinación de especulaciones óptima.

La figura 1 nos permite ver claramente cómo el programa óptimo varía cuando las restricciones (en nuestro caso las disponibilidades de tierra y mano de obra) varían; cuando éstas aumentan o disminuyen en la misma proporción, el programa se modifica únicamente en lo que se refiere a la escala de operación, conservándose las mismas especulaciones y en las mismas proporciones. Si la superficie de la explotación fuese menor de 9 hectáreas, con las mismas disponibilidades de mano de obra, la combinación remolacha-vacas (y alfalfa) sería más ventajosa; si menor de 3 hectáreas, entonces las vacas lecheras, y los cerdos después, serían los más rentables, etc.

A la vista de la figura 1 fácilmente se deduce, después de lo que hemos considerado, que el trigo presenta interés cuando la superficie de la explotación es grande con relación a las disponibilidades de mano de obra (el trabajo es factor limitativo), mientras la ganadería presenta interés cuando la superficie es pequeña con relación a las disponibilidades de mano de obra (superficie, factor limitativo).

5. Formulación y solución general del problema.

El problema general que permite resolver la programación lineal es el de obtener el máximo (o el mínimo) de una función lineal sujeta a restricciones también lineales.

En el caso general tendremos m desigualdades (o igualdades) lineales o inecuaciones que representan las restricciones del problema.

Cada desigualdad del tipo

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ih} x_h \leqq b_i$$

puede convertirse fácilmente en una igualdad sin más que añadir una nueva variable auxiliar x_{h+i}, que convertirá la inecuación en una ecuación de la forma:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ih} x_h + x_{h+i} = b_i$$

Más adelante veremos la interpretación de las nuevas variables auxiliares introducidas en el sistema.

Procediendo como se acaba de indicar, tendremos entonces un sistema de m ecuaciones lineales con un cierto número, n, de incógnitas: $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{array}{l} a_{11} \; x_1 + a_{12} \; x_2 + \ldots + a_{1n} \; x_n = b_1 \\ a_{21} \; x_1 + a_{22} \; x_2 + \ldots + a_{2n} \; x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{array}$$

El problema consiste en encontrar los valores no negativos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen las m ecuaciones y que hacen mínima una cierta función lineal: $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$.

Denotemos con la letra G el conjunto de todos los puntos n-dimensionales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tales que $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ y que satisfacen las m ecuaciones dadas. Suponemos que G contiene al menos un punto y que existe un valor finito H tal que cada una de las coordenadas de cada punto de G es menor que H. Ambos supuestos se darán en todos los problemas prácticos que encontraremos. Nuestro problema de programación lineal consiste en encontrar un punto en G que haga mínima la función objetivo. El teorema siguiente nos resultará útil:

«Si $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ son dos puntos diferentes de G, siendo $y_j = 0$ si $z_j = 0$ y $z_j = 0$ si $y_j = 0$ para todo valor de j, existe un punto $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ en G con más coordenadas nulas que $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ o $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ y tal que $c_1w_1 + \ldots + c_nw_n \leq \leq c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$ y $c_1w_1 + \ldots + c_nw_n \leq c_1z_1 + \ldots + c_nz_n$.»

En efecto, supongamos que exactamente r de las y sean positivas y que, para facilitar la exposición, sean positivas $y_1, y_2, \ldots, y_r$ y que, por lo tanto, $y_{r+1} = \ldots = y_n = 0$. Del mismo modo $z_1, \ldots, z_r$ serán todos positivos, y $z_{r+1} = \ldots = z_n = 0$.

r debe ser, por lo menos, igual a 1, pues si $r = 0$ entonces $(y_1, \ldots, y_n)$ y $(z_1, \ldots, z_n)$ serían el mismo punto. El punto n-dimensional

$$[\lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1, \ldots, \lambda y_r + (1 - \lambda) z_r, 0, \ldots, 0]$$

pertenece a G para cualquier valor de λ que haga $\lambda y_i + (1-\lambda) z_i \geq 0$

para $i = 1, \ldots r$, puesto que fácilmente puede verificarse que las coordenadas de este punto satisfacen las m ecuaciones.

Pero $\lambda y_i + (1 - \lambda) z_i \geqq 0$ significa que $\lambda \geqq - z_i/(y_i - z_i)$ si $y_i - z_i > 0$, y $\lambda \leqq - z_i/(y_i - z_i)$ si $y_i - z_i < 0$. Sea A el valor máximo de $- z_i/(y_i - z_i)$ para todos los valores de $i \leqq r$ en los cuales $y_i - z_i > 0$, y sea B el valor mínimo de $- z_i/(y_i - z_i)$ para todos los valores de $i \leqq r$ en los cuales $y_i - z_i < 0$. Esto significa que para todo valor de λ comprendido entre A y B el punto $[\lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1, \ldots, \lambda y_r + (1 - \lambda) z_r, 0, \ldots, 0]$ está en G. Evidentemente, $A < 0$; y puesto que si $y_i - z_i < 0$ se tiene

$$\frac{- z_i}{y_i - z_i} = \frac{1}{1 - y_i/z_i} > 1$$

por lo tanto, $B > 1$.

Por otro lado, ambos A y B son números finitos, pues, de no ser así, podríamos hacer a λ suficientemente grande como para hacer una coordenada superior a H, violando nuestro supuesto inicial. Cuando se hace λ igual a A o a B, al menos una de las r cantidades $\lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1, \ldots, \lambda y_r + (1 - \lambda) z_r$ es igual a cero. Tres casos posibles pueden darse:

1. $$c_1 y_1 + \ldots + c_r y_r = c_1 z_1 + \ldots + c_r z_r$$

En este caso tomaremos como punto $(w_1, \ldots, w_n)$ el punto $[A y_1 + (1 - A) z_1, \ldots, A y_r + (1 - A) z_r, 0, \ldots, 0]$ y entonces el valor de la función objetivo en el punto $(w_1, \ldots, w_n)$ es

$$A (c_1 y_1 + \ldots + c_r y_r) + (1 - A) (c_1 z_1 + \ldots + c_r z_r) = c_1 y_1 + \ldots + c_r y_r = \\ = c_1 z_1 + \ldots + c_r z_r$$

y, por lo tanto, el punto $(w_1, \ldots, w_n)$ satisface las conclusiones del teorema.

2. $$c_1 y_1 + \ldots + c_r y_r < c_1 z_1 + \ldots + c_r z_r$$

En este caso tomaremos como punto $(w_1, \ldots w_n)$ el punto $[B y_1 + (1 - B) z_1, \ldots, B y_r + (1 - B) z_r, 0, \ldots, 0]$ y entonces el valor de la función objetivo en el punto $(w_1, \ldots, w_n)$ es

$$c_1 y_1 + \ldots + c_r y_r + (1 - B) (c_1 z_1 + \ldots + c_r z_r - c_1 y_1 - \ldots - c_r y_r)$$

que es menor que $c_1 y_1 + \ldots + c_r y_r$. El punto $(w_1, \ldots, w_n)$ cumple, por tanto, las conclusiones del teorema.

3. $$c_1 y_1 + \ldots + c_r y_r > c_1 z_1 + \ldots + c_r z_r$$

En este caso tomaremos como punto $(w_1, \ldots, w_n)$ el punto $[Ay_1 + (1-A) z_1, \ldots, Ay_r + (1-A) z_r, 0, \ldots, 0]$ y entonces el valor de la función objetivo en $(w_1, \ldots, w_n)$ es

$$c_1 z_1 + \ldots + c_r z_r + A (c_1 y_1 + \ldots + c_r y_r - c_1 z_1 - \ldots - c_r z_r)$$

que es menor que $c_1 z_1 + \ldots + c_r z_r$. El punto $(w_1, \ldots, w_n)$ cumple, por tanto, las conclusiones del teorema.

Diremos que un punto $(q_1, \ldots, q_n)$ de G posee «la propiedad U» si ningún otro punto de G tiene coordenadas nulas en los mismos lugares que las coordenadas nulas de $(q_1, \ldots, q_n)$. El teorema que acabamos de probar muestra que existe por lo menos un punto con la propiedad U en el cual la función objetivo se hace mínima. En efecto, supongamos que $(y_1, \ldots, y_n)$ es un punto de G en el cual la función objetivo se hace mínima. Si $(y_1, \ldots, y_n)$ no posee la propiedad U, existe un punto distinto $(z_1, \ldots, z_n)$ de G con coordenadas nulas en los mismos lugares que las coordenadas nulas de $(y_1, \ldots, y_n)$. Entonces el teorema dice que existe un punto $(w_1, \ldots, w_n)$ de G en el cual la función objetivo se hace mínima. teniendo $(w_1, \ldots, w_n)$ más coordenadas nulas que $(y_1, \ldots, y_n)$. Si $(w_1, \ldots, w_n)$ no tiene la propiedad U, repetiremos el proceso, obteniendo siempre puntos con más y más coordenadas nulas en los cuales la función objetivo se hace mínima. Este proceso acabará por terminarse, pues hay sólo n coordenadas, y al final tendremos un punto de G con la propiedad U, en el cual la función objetivo se hace mínima.

A continuación probaremos que sólo un número finito de puntos de G poseen la propiedad U. Pues si especificamos los lugares en los que queremos coordenadas nulas, un solo punto de G tendrá coordenadas nulas en los lugares marcados, o ningún punto o más de un punto de G tendrán coordenadas nulas en tales lugares. Sólo en el primer caso obtenemos un punto con la propiedad U, y exactamente uno sólo. Puesto que hay 2^n maneras diferentes de señalar los lugares donde queremos coordenadas nulas, hay a lo sumo 2^n puntos con la propiedad U, y en la mayoría de los casos hay muchos menos de 2^n.

Ningún punto de G con menos de $n - m$ coordenadas nulas puede tener la propiedad U. En efecto, supongamos por un momento que un punto $(y_1, \ldots, y_n)$ con menos de $n - m$ coordenadas nulas tuviera la propiedad U. Sea r el número de coordenadas positivas de $(y_1, \ldots, y_n)$, que será mayor que m. Sin pérdida de generalización, podemos suponer que

$$y_1 > 0, \ldots, y_r > 0, y_{r+1} = \ldots = y_n = 0$$

Entonces

$$\begin{array}{l} a_{11}\; y_1 + a_{12}\; y_2 + \ldots + a_{1r}\; y_r = b_1 \\ a_{21}\; y_1 + a_{22}\; y_2 + \ldots + a_{2r}\; y_r = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}\, y_1 + a_{m2}\, y_2 + \ldots + a_{mr}\, y_r = b_m \end{array}$$

Puesto que $r > m$, deberán existir cantidades $(q_1, \ldots, q_r)$, siendo $q_i \neq y_i$ para al menos un valor de $i \leqq r$ y que cumplan

$$\begin{array}{l} a_{11}\; q_1 + a_{12}\; q_2 + \ldots + a_{1r}\; q_r = b_1 \\ a_{21}\; q_1 + a_{22}\; q_2 + \ldots + a_{2r}\; q_r = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}\, q_1 + a_{m2}\, q_2 + \ldots + a_{mr}\, q_r = b_m \end{array}$$

pues, si no fuera así, m ecuaciones lineales determinarían únicamente r incógnitas, lo cual es imposible si $r > m$. Pero, en tal caso, un valor no nulo de λ puede encontrarse de tal forma que el punto $[\lambda q_1 + (1 - \lambda)\, y_1, \ldots, \lambda q_r + (1 - \lambda) y_r, 0, \ldots, 0]$ es de G, y $\lambda q_i + (1 - \lambda)\, y_i > 0$ para $i = 1, \ldots r$, que muestra que el punto $(y_1, \ldots, y_n)$ no posee la propiedad U.

Puesto que solamente un número finito de puntos de G tiene la propiedad U y el valor mínimo de la función objetivo tiene lugar en un punto con la propiedad U, podemos, en principio, hallar todos los puntos de G que tienen la propiedad U, calcular el valor de la función objetivo en cada uno de tales puntos y escoger el punto que dé el valor mínimo de la función.

Se ve fácilmente que cuando se manejan problemas de cierta magnitud la completa enumeración de los puntos que presentan la propiedad U sería prohibitivamente larga. Por esto, vamos a describir a continuación una técnica más eficiente para hallar las coordenadas del punto que hace mínimo el valor de la función objetivo.

6. El método Simplex.

Explicamos este método de resolución de problemas de programación lineal por ser el de uso más corriente, sobre todo por ser susceptible de resolución automática por computadores electrónicos (ordenadores).

En todos los problemas que encontraremos, n será siempre mayor que m, y desde este momento supondremos que es así. Entonces cualquier punto de G con la propiedad U tiene al menos $n - m$ coordenadas nulas. En la mayoría de los problemas que se encuentran en la práctica, cada punto de G con la propiedad U tiene exactamente $n - m$ coordenadas nulas. Son los llamados problemas no-degenerados. Ahora nos ocupamos solamente de estos casos, es decir, de aquellos en los que cada punto de G con la propiedad U tiene exactamente m coordenadas positivas y $n-m$ coordenadas nulas.

Supongamos que $(g_1, \ldots, g_n)$ es un punto de G con la propiedad U. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $g_1, \ldots, g_m$ son positivas y que $g_{m+1} = \ldots = g_n = 0$. Las m ecuaciones con m incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_m$

$$\begin{array}{c}
a_{11}\ x_1 + \ldots + a_{1m}\ x_m = b_1 \\
a_{21}\ x_1 + \ldots + a_{2m}\ x_m = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}\, x_1 + \ldots + a_{mm}\, x_m = b_m
\end{array}$$

tienen solución única: $x_1 = g_1, \ldots, x_m = g_m$, pues, si existe más de una solución, no es difícil probar que el punto $(g_1, \ldots, g_n)$ no tiene la propiedad U. El hecho de que haya solución única implica que el determinante

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & \ldots & a_{1m} \\
a_{21} & \ldots & a_{2m} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \ldots & a_{mm}
\end{vmatrix}$$

es distinto de cero. Esto, a su vez, significa que pueden resolverse las ecuaciones

$$\begin{array}{l} a_{11}\ x_1 + \ldots + a_{1m}\ x_m = b_1 - a_{1,\,m+1}\ x_{m+1} - \ldots - a_{1n}\ x_n \\ a_{21}\ x_1 + \ldots + a_{2m}\ x_m = b_2 - a_{2,\,m+1}\ x_{m+1} - \ldots - a_{2n}\ x_n \\ \vdots \\ a_{m1}\ x_1 + \ldots + a_{mm}\ x_m = b_m - a_{m,\,m+1}\ x_{m+1} - \ldots - a_{mn}\ x_n \end{array}$$

para $x_1, \ldots, x_m$ en función de $x_{m+1}, \ldots, x_n$.

Cada una de las cantidades $x_1, \ldots, x_m$ será función lineal de las cantidades $x_{m+1}, \ldots, x_n$, es decir:

$$x_i = g_i + h_{i,\,m+1}\, x_{m+1} + \ldots + h_{in}\, x_n$$

para $i = 1, \ldots m$. Obsérvese que cuando $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$, x_i deberá ser igual a g_i, para estar de acuerdo con nuestros supuestos originales. La función objetivo $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ puede ahora expresarse en función de $x_{m+1}, \ldots, x_n$, es decir, de la forma

$$g_0 + d_{m+1}\, x_{m+1} + \ldots + d_n\, x_n$$

Resulta conveniente disponer todas estas relaciones en un cuadro como el siguiente:

	constante	coeficiente de		
		x_{m+1}	x_{m+2}	$\ldots x_n$
x_1	g_1	$h_{1,\,m+1}$	$h_{1,\,m+2}$	$\ldots h_{1n}$
x_2	g_2	$h_{2,\,m+1}$	$h_{2,\,m+2}$	$\ldots h_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	g_m	$h_{m,\,m+1}$	$h_{m,\,m+2}$	$\ldots h_{mn}$
Objetivo	g_0	d_{m+1}	d_{m+2}	$\ldots d_n$

Adviértase que hemos decidido expresar todo en función de $x_{m+1}, \ldots, x_n$ por pura conveniencia para facilitar la exposición; en cualquier caso práctico encontraremos diferentes series de x a un lado y en la cabecera del cuadro.

En el cuadro considerado, correspondiente al punto $(g_1, g_2, \ldots, g_m, 0, \ldots, 0)$, vemos que si los valores $d_{m+1}, \ldots, d_n$ son todos no negativos (o sea nulos o positivos), la función objetivo no puede hacerse más pequeña al dar a cualquiera de las variables $x_{m+1}, \ldots, x_n$ un valor superior a cero. En tal caso, si los valores

$d_{m+1}, \ldots, d_n$ son todos no negativos, la función objetivo toma su valor mínimo en el punto $(g_1, g_2, \ldots, g_m, 0, \ldots, 0)$.

Sin embargo, si uno o más de los valores $d_{m+1}, \ldots, d_n$ son negativos, la función objetivo puede disminuirse sin más que hacer positiva cualquiera de las variables $x_{m+1}, \ldots, x_n$ correspondiente a un d negativo. Según el método Simplex, se da el mayor valor positivo posible a una de las variables $x_{m+1}, \ldots, x_n$ correspondiente a un d negativo. Si una sola de las cantidades $d_{m+1}, \ldots, d_n$ es negativa, no hay ninguna duda acerca de cuál x debe hacerse positiva. Si más de una de las cantidades $d_{m+1}, \ldots, d_n$ es negativa, escogeremos la x correspondiente al mayor d en valor absoluto.

Supongamos que d_s es la mayor en valor absoluto de las d negativas, de manera que haremos x_s mayor que cero. Demos a x_s el mayor valor posible y supongamos que éste sea Δ. Según nuestro supuesto inicial, $\Delta < H < \infty$. Cuando damos a x_s el valor Δ, mientras conservamos nulas el resto de las variables $x_{m+1}, \ldots, x_n$, entonces $x_i = g_i + h_{is}\,\Delta$ para $i = 1, \ldots m$, y además es preciso que $g_i + h_{is}\,\Delta \geqq 0$ para $i = 1, \ldots m$. Esto es una limitación para Δ sólo cuando $h_{is} < 0$, en cuyo caso $\Delta \leqq (-g_i/h_{is})$. De esto se deduce que $\Delta = \text{mín}\,(-g_i/h_{is})$, en el que el mínimo se refiere a todos los valores de i entre 1 y m para los cuales h_{is} es negativo, Cuando x_s se hace igual a Δ, al menos una de las cantidades $x_1, \ldots, x_m$ se hace cero, y en nuestro supuesto de no degeneración, exactamente una de las cantidades $x_1, \ldots, x_m$ se hace cero. Sea x_r esta variable, de manera que $\Delta = -g_r/h_{rs}$.

Construímos ahora un nuevo cuadro, con x_r en la cabecera y x_s en la columna de la izquierda. Distinguiremos los valores de este nuevo cuadro usando «primas»: g'_i, h'_{ij}, d'_j. Con objeto de desarrollar fórmulas para g'_i, h'_{ij}, d'_j en función de g_i, h_{ij}, d_j expresaremos primero x_s en función de $x_r, x_{m+1}, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_n$.

En efecto, del cuadro inicial se deduce que

$$x_r = g_r + h_{r,\,m+1}\,x_{m+1} + \ldots + h_{rs}\,x_s + \ldots + h_{rn}\,x_n$$

Puesto que $h_{rs} < 0$, podemos despejar x_r y obtendremos

$$x_s = \frac{-g_r}{h_{rs}} + \frac{1}{h_{rs}}\,x_r - \frac{h_{r,\,m+1}}{h_{rs}}\,x_{m+1} - \ldots - \frac{h_{rn}}{h_{rs}}\,x_n$$

Así obtenemos los valores del nuevo cuadro en la fila correspondiente a x_s:

$$g'_s = \frac{-g_r}{h_{rs}} \quad ; \quad h'_{sr} = \frac{1}{h_{rs}} \quad ; \quad h'_{sj} = \frac{-h_{rj}}{h_{rs}} \quad \text{para } j \neq r$$

A continuación expresamos x_i $(1 \leqq i \leqq m;\ i \neq r)$ en función de $x_r,\ x_{m+1},\ x_{m+2}, \ldots, x_{s-1},\ x_{s+1}, \ldots, x_n$ por medio del siguiente cálculo. Del primer cuadro se deduce

$$x_i = g_i + h_{i,m+1}\ x_{m+1} + \ldots + h_{is}\ x_s + \ldots + h_{in}\ x_n$$

Sustituyendo en el segundo miembro de esta ecuación x_s por su valor en función de x_r, $x_{m+1}, \ldots, x_{s-1}$, $x_{s+1}, \ldots, x_n$, obtenido arriba, queda

$$x_i = g_i - \frac{g_r\, h_{is}}{h_{rs}} + \frac{h_{is}}{h_{rs}} x_r + \left(h_{i,m+1} - \frac{h_{is}\, h_{r,m+1}}{h_{rs}}\right) x_{m+1} + \ldots +$$
$$+ \left(h_{in} - \frac{h_{is}\, h_{rn}}{h_{rs}}\right) x_n$$

que nos da los valores del nuevo cuadro en la fila correspondiente a x_i:

$$g'_i = g_i - \frac{g_r\, h_{is}}{h_{rs}} \quad ; \quad h'_{ir} = \frac{h_{is}}{h_{rs}} \quad ; \quad h'_{ij} = h_{ij} - \frac{h_{is}\, h_{rj}}{h_{rs}} \quad \text{para } j \neq r$$

Finalmente, expresamos la función objetivo en función de x_r, x_{m+1}, $x_{m+2}, \ldots, x_{s-1}$, $x_{s+1}, \ldots, x_n$ por medio del siguiente cálculo. Del primer cuadro se deduce que la función objetivo es igual a $g_0 + d_{m+1}\ x_{m+1} + \ldots + d_s\ x_s + \ldots + d_n x_n$. Sustituyendo x_s por su valor obtenido anteriormente, resulta como expresión de la función objetivo

$$g_0 - \frac{d_s\, g_r}{h_{rs}} + \frac{d_s}{h_{rs}} x_r + \left(d_{m+1} - \frac{d_s\, h_{r,m+1}}{h_{rs}}\right) x_{m+1} + \ldots + \left(d_n - \frac{d_s\, h_{rn}}{h_{rs}}\right) x_n$$

que nos da los valores del nuevo cuadro en la fila correspondiente a la función objetivo:

$$g'_0 = g_0 - \frac{d_s\, g_r}{h_{rs}} \quad ; \quad d'_r = \frac{d_s}{h_{rs}} \quad ; \quad d'_j = d_j - \frac{d_s\, h_{rj}}{h_{rs}} \quad \text{para } j \neq r$$

El nuevo cuadro corresponde al siguiente punto de G: $x_i = 0$ si x_i figura en la fila correspondiente a la cabecera del cuadro; $x_i = g'_i$ si x_i figura en la columna lateral izquierda del cuadro.

Este punto tiene la propiedad U, ya que las x de la cabecera determinan en forma única las x que figuran a lo largo del lado izquierdo. Además, este punto constituye una mejora sobre el punto correspondiente al cuadro inicial, puesto que el valor de la función objetivo ha disminuído al pasar al nuevo cuadro. Si ninguna d' en este nuevo cuadro es negativa, entonces la función objetivo se hace mínima en el punto de G correspondiente al nuevo cuadro. Pero, si al menos una d' en el nuevo cuadro es negativa, podremos disminuir el valor de la función objetivo pasando a un tercer cuadro, sirviéndonos del mismo procedimiento utilizado para pasar del cuadro núm. 1 al cuadro núm. 2. Continuamos procediendo así hasta que lleguemos a un cuadro que no tenga ninguna d negativa, que representa, por lo tanto, un punto en el que la función objetivo toma un valor mínimo. Tal cuadro deberá obtenerse en un número finito de pasos, llamados corrientemente iteraciones, ya que cada cuadro corresponde a un punto con la propiedad U y hay un número finito de tales puntos.

Hemos descrito en grandes rasgos el método simplex, que procede de cuadro a cuadro según una marcha sistemática. Cada cuadro representa un punto de G con la propiedad U. Un problema que aún no hemos tratado es el de la construcción del primer cuadro. En general, y sobre todo en las aplicaciones del método a la programación de explotaciones agrícolas, el primer cuadro —o solución de base inicial— es muy fácil de obtener directamente. Sin embargo, con objeto de completar el estudio del método simplex incluyendo todos los casos posibles, vamos a apuntar un método siempre válido de obtener tal cuadro inicial.

En efecto, el cuadro inicial puede obtenerse resolviendo primero el siguiente problema de programación lineal: Hallar los valores no negativos de $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ que hacen mínimo el valor de $x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}$ y que satisfacen las ecuaciones:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\ x_1 + \ldots + a_{1n}\ x_n \pm x_{n+1} = b_1 \\
a_{21}\ x_1 + \ldots + a_{2n}\ x_n \pm x_{n+2} = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}\, x_1 + \ldots + a_{mn}\, x_n \pm x_{n+m} = b_m
\end{array}
$$

en donde en la ecuación de orden i se utilizará $+\ x_{n+i}$ si $b_i > 0$, y $-\ x_{n+i}$ si $b_i < 0$. (Si $b_i = 0$, no se introduce x_{n+i} en el problema.) Para resolver este nuevo problema de programación lineal, un cuadro inicial puede escribirse inmediatamente sin más que expresar $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ en función de $x_1, \ldots, x_n$. Este cuadro corresponde al punto $x_1 = \ldots = x_n = 0,\ x_{n+1} = |b_1|, \ldots, x_{n+m} =$

$= |b_m|$. El cuadro final de este problema de programación lineal deberá, naturalmente, representar un punto donde $x_{n+1} = \ldots = x_{n+m} = 0$, ya que se trata de hacer mínimo $x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}$. Pero las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ de este punto satisfacen las m igualdades del problema original y solamente m de las cantidades $x_1, \ldots, x_n$ son positivas. Es decir, las cantidades $x_1, x_2, \ldots, x_n$ representan un punto con la propiedad U perteneciente a nuestro problema original de programación lineal. El cuadro correspondiente a este punto $x_1, \ldots, x_n$ en el problema original puede entonces construirse.

Todos los cálculos descritos hasta ahora han estado basados en el supuesto de que el problema de programación lineal es no-degenerado, esto es, en el que cada punto de G con la propiedad U tiene exactamente m coordenadas positivas y $n - m$ coordenadas nulas. ¿Qué ocurrirá si no es éste el caso? En efecto, puede ocurrir que en un cuadro uno o más de los valores g_i sean nulos ($i \neq 0$). En tal caso, aunque una de las d sea negativa, puede resultar imposible aumentar la x correspondiente por encima de cero, porque una x de la columna de la izquierda correspondiente a un g nulo puede hacerse negativa, lo cual no está permitido. Una forma de manejar esta situación consiste en aumentar arbitrariamente el g nulo en una cantidad muy pequeña. Esto cambia, naturalmente, el problema original, pero el nuevo problema es no-degenerado y muy parecido al problema original. Una vez obtenida la solución del nuevo problema, es fácil reconocer la solución del problema original: si una x en la solución del nuevo problema tiene un valor muy próximo a cero, la x correspondiente en la solución del problema original es cero.

7. Formulación matricial.

El problema general de la programación lineal, que hemos tratado sirviéndonos del álgebra elemental, por sencillez de exposición, puede tratarse en forma paralela utilizando el cálculo matricial, con la ventaja adicional de su mayor concisión. Nos limitaremos a traducir lo que hemos visto hasta ahora, usando el algoritmo del álgebra de matrices, y a familiarizar al lector con la terminología corrientemente utilizada.

Las variables $x_j (j = 1, \ldots, n)$ que hemos venido considerando representan las cantidades a utilizar o a producir de la «actividad» o «proceso» al que se refiere el subíndice j.

El vector columna

$$P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \ldots n)$$

correspondiente a la actividad j se compone de una serie de coeficientes técnicos que representan, en general, las necesidades unitarias de la actividad j en cada uno de los recursos que condicionan el problema.

El vector columna

$$P_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

representa, en general, las disponibilidades, a no rebasar, de recursos restrictivos.

El sistema de ecuaciones lineales, que deben satisfacer las soluciones de un programa lineal, puede expresarse, por lo tanto, en forma condensada:

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_n x_n = P_0$$

o, en forma aún más concisa:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = P_0$$

El vector columna

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

representa en cada caso una solución del programa. Si introducimos el vector línea $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, que representa los costes (o beneficios) unitarios de cada «actividad», entonces la función objetivo a minimizar (o a maximizar) se convierte en

$$Z = cX$$

El problema general se plantea, pues, de la siguiente forma: Hallar el valor de

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

de componentes no negativos ($x_j \geq 0$) que satisfacen a

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = P_0$$

y que hacen mínimo (o máximo)

$$Z = cX.$$

Los distintos cuadros de que antes nos ocupamos forman las llamadas «soluciones de base», siendo el último cuadro el que da lugar a la «solución óptima».

El conjunto de puntos que hemos llamado G corresponde al concepto de «poliedro convexo», y los puntos que tienen la propiedad U son los llamados «puntos extremos» del poliedro convexo. Los teoremas que hemos probado antes traducen el hecho de que la solución óptima se encuentra siempre en un punto extremo del poliedro convexo formado por las «restricciones» o ecuaciones lineales condicionantes. El método simplex proporciona un procedimiento sistemático de «trepar» de un punto extremo a otro más conveniente, hasta llegar, después de un número finito de «iteraciones», a la solución óptima, es decir, aquella que «optimiza» la «función objetivo» o «función económica». En la práctica se ha observado que el número de iteraciones a efectuar desde la solución inicial de base hasta llegar a la solución óptima está directamente relacionado con el número m de ecuaciones restrictivas.

8. Problema dual.

Hemos visto que el problema general de programación lineal consiste en determinar los valores de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen las condiciones

$$\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1h}\, x_h \leqq b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2h}\, x_h \leqq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mh}\, x_h \leqq b_m \end{array}$$

y a $x_j \geqq 0\ (j = 1, 2, \ldots, h)$ y hacen mínima (o máxima) la función

$$Z = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \ldots + c_h\, x_h$$

Pues bien, con las constantes a_{ij}, b_i y c_j de este problema e introduciendo las variables $u_1, u_2, \ldots, u_m$ puede construirse un nuevo problema de programación lineal, cuyo enunciado es el siguiente: determinar los valores de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ que satisfaciendo las condiciones lineales

$$\begin{array}{l} a_{11}\, u_1 + a_{21}\, u_2 + \ldots + a_{m1}\, u_m > c_1 \\ a_{12}\, u_1 + a_{22}\, u_2 + \ldots + a_{m2}\, u_m > c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1h}\, u_1 + a_{2h}\, u_2 + \ldots + a_{mh}\, u_m > c_h \end{array}$$

y a $u_i \geqq 0\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ hacen máxima (o mínima) la función objetivo

$$Z' = b_1\, u_1 + b_2\, u_2 + \ldots + b_m\, u_m$$

Este es el llamado «problema dual», de importante interpretación económica, que veremos más adelante. Por ahora baste saber que puede probarse que si el primer problema tiene solución finita, también la tendrá su dual, y que la solución es la misma, es decir, el mínimo (o máximo) del primero coincide con el máximo (o mínimo) de su dual.

Los dos problemas, el primal y el dual, pueden representarse en forma esquemática de la siguiente forma:

mín.	x_1	x_j	x_h	
u_1	a_{11}	a_{1j}	a_{1h}	b_1
u_i	a_{i1}	a_{ij}	a_{ih}	b_i
u_m	a_{m1}	a_{mj}	a_{mh}	b_m
	c_1	c_j	c_h	máx.

9. La programación lineal y la agricultura.

Hemos dedicado esta primera parte del trabajo a una exposición general sobre la evolución de los métodos utilizados en la programación agrícola y hemos cargado un poco el acento sobre los aspectos teóricos de la programación lineal. En la segunda parte nos ocuparemos de la aplicación práctica de la programación lineal a unas explotaciones agrícolas reales. Pero antes de terminar esta primera parte parece oportuno señalar algunas limitaciones del método, sobre todo, por caer dentro del marco de este trabajo, en lo que se refiere a sus aplicaciones en el mundo agrícola.

El nombre de programación lineal indica ya cuál es el supuesto fundamental inherente al método: las relaciones lineales entre los factores de la producción y la producción. ¿Está acaso tal supuesto de acuerdo con la realidad de la producción agrícola? No, desde luego, en teoría (5), si bien, en la práctica, por desconocimiento de las respectivas funciones de producción, un coeficiente, representativo de la productividad media, en un cierto intervalo puede dar resultados suficientemente buenos. Mas tomemos un caso concreto donde resulta difícil admitir tal linearidad: el caso de las necesidades de trabajo impuestas por distintas «actividades» agrícolas en función de la escala de operación de tales actividades. No cabe duda de que las exigencias en mano de obra por hectárea de trigo no son las mismas cuando se cultivan de este producto 2,50 hectáreas que cuando se trata de 750 hectáreas. Pues bien, un caso como éste no presenta ninguna dificultad teórica. En efecto, siempre podremos sustituir con bastante aproximación la curva que relaciona las necesidades de trabajo por hectárea con el número de hectáreas del cultivo en cuestión, por una línea quebrada que une puntos de la curva en cuestión a determinados intervalos. Esto equivale a considerar varios coeficientes en lugar de uno solo, cada uno válido en un cierto intervalo, determinado éste por las categorías que se establezcan en función de la superficie de cultivo. Supongamos —caso hipotético— que las necesidades de trabajo, en forma de jornadas por hectárea del cultivo *C* varían de la forma siguiente:

---

(5) A este respecto véase el artículo "Las funciones de producción en agricultura", por Emilio Gómez Manzanares, Revista de Estudios Agro-Sociales, núm. 48, julio-septiembre 1964.

$x_1 < 1$ Ha. de C	10,5 jornadas/Ha.
$1 < x_2 < 3$ Ha. de C	8,3 » »
$3 < x_3 < 10$ Ha. de C	5,2 » »
$10 < x_4 < 50$ Ha. de C	3,1 » »
$x_5 > 50$ Ha. de C	2,2 » »

Bastará considerar x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 como si tratasen de distintas «actividades» independientes unas de otras. Como condiciones, además de las normales del programa, tendríamos

$$x_1 \geqq 0 \quad ; \quad x_2 \geqq 1 \quad ; \quad x_3 \geqq 3 \quad ; \quad x_4 \geqq 10 \quad ; \quad x_5 \geqq 50$$

En efecto, en la solución óptima no puede darse un caso tal como $x_5 = 25$, ya que $x_5 \geqq 50$ es una restricción incorporada en el modelo. Tampoco puede darse $x_4 = 58$, por ejemplo, puesto que en tal caso habría salido x_5 en su lugar, que presenta obvias ventajas económicas sobre x_4.

Otra limitación de la programación lineal la presenta la propiedad de la aditividad de las actividades. Se supone que cada actividad es independiente de las demás, que la elección de una no lleva consigo la elección de otra y que la realización de una no ejerce ninguna influencia sobre las exigencias y el rendimiento de otra.

Estos supuestos son evidentemente falsos cuando al hablar de «actividades» pensamos en especulaciones (trigo, remolacha, aves, etcétera). Mas, si en lugar de considerar tales actividades, consideramos bloques compuestos por varias especulaciones donde varían las proporciones de cada una (rotaciones de cultivo, en términos agronómicos), entonces tal problema no se presenta, pues las nuevas actividades pueden ahora considerarse como prácticamente independientes.

En la segunda parte se verá cómo nos hemos servido de este artificio y también cómo hemos integrado en los modelos calculados otras interrelaciones entre las producciones de la explotación (en especial, las producciones forrajeras y el ganado).

Otra objeción que suele ponérsele al método es el del supuesto de divisibilidad completa de las actividades y de los factores. Esta hipótesis implica la posibilidad de utilizar los factores y de realizar las actividades en cantidades fraccionarias. Esto se traduce, por ejemplo, en que el programa óptimo puede comportar el cultivo de 0,0015 hectáreas de remolacha y la explotación de 8,87 vacas lecheras.

Esta hipótesis es tanto más fastidiosa cuanto más pequeña es la explotación analizada, pues en ella las fracciones tienen una importancia relativa mayor. Actualmente los investigadores estudian el problema de programas en números enteros, y ya existen algunas realizaciones en este terreno (6).

II.—PROGRAMACION DE LAS EXPLOTACIONES AGRICOLAS DE LA ZONA DE LA VIOLADA

1. Generalidades.

Nos proponemos en esta segunda parte del trabajo aplicar los conceptos desarrollados en la primera parte a una situación concreta: la de las explotaciones agrícolas de la zona de La Violada. Se trata de una pequeña región agrícola, colonizada por el Instituto Nacional de Colonización, cuyas características han sido descritas ya repetidas veces, por lo que no insistiremos más en este trabajo (7).

Nuestro propósito principal es familiarizar al lector con la aplicación práctica de los programas lineales en agricultura y mostrar la utilidad de los mismos, su flexibilidad y facilidad de adaptación a situaciones diversas. Al mismo tiempo mostraremos cómo se resuelve paso por paso un programa lineal, comenzando por su planteamiento, determinación de los datos necesarios, resolución práctica e interpretación económica de los resultados.

2. Planteamiento del problema.

En el proceso de la producción agrícola el agricultor transforma en productos agrícolas (trigo, remolacha, leche, etc.) los factores de la producción. La economía clásica distingue tres

---

(6) Véase, por ejemplo, "Programmes en nombres entiers et programmes mixtes", por François Lambert, en la revista *Metra*, vol. 1, núm. 1, París.

(7) Véase a este respecto:

"La transformación del desierto de La Violada", por Emilio Gómez Ayau, Revista de Estudios Agro-Sociales, núm. 20, julio-septiembre 1957.

"Planteamiento y organización de un estudio económico de las explotaciones agrícolas de la zona de La Violada", por Enrique Botella y Fúster y Emilio Gómez Manzanares, Revista de Estudios Agro-Sociales, núm. 40, julio-septiembre 1962.

"Estudio económico de un grupo de explotaciones agrícolas de la zona de La Violada", por Enrique Botella y Fúster, Revista de Estudios Agro-Sociales, núm. 42, enero-marzo 1963.

"Funciones de producción en agricultura", por Emilio Gómez Manzanares, Revista de Estudios Agro-Sociales, núm. 48, julio-septiembre 1964.

factores principales: la tierra, el capital y el trabajo. En lo que sigue, donde vamos a ocuparnos esencialmente de la programación lineal, haremos la distinción siguiente:

— Factores comunes: los que son susceptibles de ser afectados a varias producciones. Tales son, principalmente: la tierra, la mano de obra permanente, familiar y asalariada, las construcciones y ciertas máquinas agrícolas.

  Así, por ejemplo, el agricultor puede dedicar su tierra al cultivo de diversos productos: trigo, cebada, avena, remolacha, alfalfa, etc. Podría también, por otra parte, dejarla sin cultivar.

  A corto plazo estos factores son fijos y deben ser juiciosamente repartidos entre las diversas especulaciones practicadas. Su utilización por el explotante engendra los costes comunes.

— Los factores directos: los que son propios de una producción determinada, tales como los abonos, las semillas, la mano de obra estacional, los piensos del ganado, etc. Así, el cultivo del trigo implica la utilización de semillas de trigo, la aplicación de una dosis determinada de abonado, el consumo de cierta cantidad de carburante y, tal vez, el recurso a los servicios de un empresario encargado de la trilla.

  El empleo de estos factores engendra costes directos, los cuales son entera y directamente imputables a las especulaciones a que son afectados.

En estas condiciones, el problema de la organización de la explotación puede plantearse en los siguientes términos:

¿Cómo repartir los factores susceptibles de varios usos entre las distintas especulaciones posibles, o, mejor aún, qué combinación de estas especulaciones se deberá adoptar para realizar el máximo beneficio?

La técnica de la programación lineal permite dar una respuesta a esta pregunta siempre que se conozca para cada especulación considerada:

a) La renta neta unitaria, igual a la diferencia entre la renta bruta (valor de la producción) y los costes unitarios directos.

b) La cantidad de cada factor de empleo polivalente utilizado por unidad de producto.

3. Programación de las explotaciones de La Violada.

Vamos a iniciar la aplicación de los programas lineales a una explotación media, representativa de las explotaciones agrícolas de la zona de La Violada. Se trata de una explotación de 10 hectáreas de regadío con unas disponibilidades anuales de 600 jornadas de trabajo, equivalentes a 2 U. T. H. (unidades de trabajo humano).

Las especulaciones que vamos a considerar son: trigo, cebada, maíz, remolacha, alfalfa, vacas lecheras, cerdas de cría y gallinas (para la producción de huevos).

Los siguientes datos son necesarios para poder plantear el problema en forma de programa lineal (8):

A.—Producción total

Especulaciones vegetales	Unidad	Rendimiento Qm/ha.	Precio Pts./Qm.	Valor de la producción Pts/ha.
Trigo	Hectárea	28	600	16.800
Cebada	»	29	450	13.050
Maíz	»	40	450	18.000
Remolacha ...	»	320	123	39.360
Alfalfa	»	650	44	28.600

Especulaciones animales	Unidad	Rendimiento	Precio Pts/unid.	Valor de la producción Pts/unid.
Vacuno	Vaca adulta	4.380 Litros leche	5,30	26.214
Cerda	Madre adulta	14 Lechones	500	9.000
Aves	100 aves	2.130 Docenas huevos	24	55.120

(8) Aprovechamos esta oportunidad para hacer público nuestro agradecimiento al Ingeniero Agrónomo Miguel Blasco, del Instituto Nacional de Colonización en Zaragoza, que nos ha proporcionado amablemente los datos sobre producciones, gastos y exigencias en mano de obra de las distintas especulaciones.

B.—GASTOS DIRECTOS.

Especulaciones vegetales	Semillas	Fertilizantes	Insecticidas	Cánon de riego	Carburantes y alquiler maquinaria	Obradas yunta	Varios	Total Pts/ha.
Trigo	1.105	3.528	—	288	1.800	—	400	7.121
Cebada	700	2.973	—	288	1.800	—	400	6.161
Maíz	500	3.747	810	616	1.080	600	616	7.969
Remolacha	1.155	4.044	430	880	1.350	640	4.500	13.000
Alfalfa	300	1.420	410	1.848	270	190	5.400	9.838

Especulaciones animales	Unidad	Piensos	Atenciones ganado	Amortización e intereses	Total gastos directos Pts/unid.
Vacuno	Vaca adulta	15.695	385	3.633	19.713
Cerda	Madre adulta	4.649	200	1.540	6.389
Aves	100 aves	29.656	150	12.600	42.406

C.—EXIGENCIAS DE MANO DE OBRA.

Especulaciones vegetales	Número de jornadas por Ha.				Total año
	Primavera	Verano	Otoño	Invierno	
Trigo	1,50	1,50	2,00	0,25	5,25
Cebada	1,50	1,50	2,00	0,25	5,25
Maíz	3,50	28,00	12,35	1,00	44,85
Remolacha	21,60	10,50	0,35	32,00	64,45
Alfalfa	8,25	17,00	4,75	—	30,00

Especulaciones animales	Número de jornadas por unidad				Total año
	Primavera	Verano	Otoño	Invierno	
Vacuno	9,12	9,12	9,12	9,12	36,50
Cerda	5,75	5,75	5,75	5,75	23,00
Aves	4,56	4,56	4,56	4,56	18,25

De los cuadros A y B se obtienen directamente los beneficios unitarios de cada especulación:

Especulaciones vegetales	Valor de la producción Pts/ha.	Gastos directos Pts/ha.	Beneficio unitario Pts/ha.
Trigo	16.800	7.121	9.679
Cebada	13.050	6.161	6.889
Maíz	18.000	7.969	10.031
Remolacha	39.360	13.000	26.360
Alfalfa	28.600	9.838	18.762
Especulaciones animales	**Valor de la producción Pts/unid.**	**Gastos directos Pts/unid.**	**Beneficio unitario Pts/unid.**
Vacuno	26.214	19.713	6.501
Cerda	9.000	6.839	2.611
Aves	55.120	42.406	12.714

Si llamamos $x_1, x_2, \ldots, x_8$ las cantidades de cada especulación que entrarán en cada programa de producción (teniendo en cuenta que siempre $x_i \geqq 0$), la función objetivo del programa, es decir, aquella que es preciso hacer máxima, será:

$$Z = 9.679\, x_1 + 6.889\, x_2 + 10.031\, x_3 + 26.360\, x_4 + 18.762\, x_5 + 6.501\, x_6 + $$
$$+ 2.611\, x_7 + 12.714\, x_8$$

que representa el beneficio bruto total del programa $(x_1, x_2, \ldots, x_8)$.

Veamos cuáles serían las distintas restricciones del programa:

a) Restricciones sobre la utilización del suelo.

(i) Ante todo, las que resultan del hecho de que la superficie de la explotación es limitada e igual a 10 hectáreas. Podría expresarse así:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leqq 10$$

(ii) Supongamos, por otra parte, que contamos con otra restricción de carácter agronómico, cual es la de que por imperativos de las rotaciones de cultivos posibles la superficie de remolacha no puede superar un tercio de la superficie de la explotación, es decir, 3,33 hectáreas. Su formulación es simple:

$$x_4 \leqq 3{,}33$$

(iii) Una tercera imposición agronómica obliga a dedicar al menos un cuarto de la superficie de la explotación a la alfalfa:

$$x_5 \geqq 2{,}50$$

b) Restricciones impuestas por las disponibilidades en mano de obra:

(i) Relativas a las disponibilidades en primavera (150 jornadas):

$$1{,}50\,x_1 + 1{,}50\,x_2 + 3{,}50\,x_3 + 21{,}60\,x_4 + 8{,}25\,x_5 + 9{,}12\,x_6 + 5{,}75\,x_7 + 4{,}56\,x_8 \leqq 150$$

(ii) Relativas a las disponibilidades en verano (150 jornadas):

$$1{,}50\,x_1 + 1{,}50\,x_2 + 28{,}00\,x_3 + 10{,}50\,x_4 + 17{,}00\,x_5 + 9{,}12\,x_6 + 5{,}75\,x_7 + 4{,}54\,x_8 \leqq 150$$

(iii) Relativas a las disponibilidades en otoño (150 jornadas):

$$2{,}00\,x_1 + 2{,}00\,x_2 + 12{,}35\,x_3 + 0{,}35\,x_4 + 4{,}75\,x_5 + 9{,}12\,x_6 + 5{,}75\,x_7 + 4{,}6\,x_8 \leqq 150$$

(iv) Relativas a las disponibilidades en invierno (150 jornadas):

$$0{,}25\,x_1 + 0{,}25\,x_2 + 1{,}00\,x_3 + 32{,}00\,x_4 + 9{,}12\,x_6 + 5{,}75\,x_7 + 4{,}56\,x_8 \leqq 150$$

c) Restricciones de orden alimenticio (impuestas por la necesidad de producir en la explotación los piensos del ganado explotado en la misma).

(i) La que liga la superficie de alfalfa al número de vacas y cerdos de la explotación. Hemos supuesto que cada vaca necesita al año 3.650 kilogramos de heno de alfalfa (10 kilogramos al día), que equivale a la producción de 0,22 hectáreas de alfalfa con el rendimiento medio supuesto. La cifra para los cerdos (1.460 kilogramos de alfalfa en verde) equivale a 0,02 hectáreas. La condición de que las vacas y cerdos de la explotación necesitan tal superficie mínima de alfalfa puede expresarse:

$$x_5 \geqq 0{,}22\,x_6 + 0{,}02\,x_7$$

o, de otra forma:

$$-\,x_5 + 0{,}22\,x_6 + 0{,}02\,x_7 \leqq 0$$

(ii) La que resulta de asegurar en la explotación la producción de cebada requerida por el ganado de labor. Hemos estimado que al menos 1,20 hectáreas de cebada resulta necesario cultivar en la explotación. Por lo tanto:

$$x_2 \geqq 1{,}20$$

d) Restricciones impuestas por la capacidad de alojamiento de los animales. Vamos a suponer que no hay limitaciones en este sentido en lo que se refiere a las vacas y cerdos, es decir, que las construcciones existentes en la explotación permiten alojar todos los animales que las demás restricciones consienten (principalmente las disponibilidades de mano de obra). No es así el caso para las aves, en que vamos a suponer que el número máximo de éstas capaces de alojarse en la explotación es de 100. Por tanto,

$$x_8 \leqslant 1$$

(ya que hemos escogido 100 aves como unidad).

Ya tenemos, pues, todos los elementos necesarios para resolver este sencillo programa lineal. Pero, antes de resolverlo, vamos a tratar de simplificarlo en lo posible, con objeto de ahorrar cálculos posteriores. Dos tipos de simplificaciones se conciben: simplificación de actividades, por supresión de las que sean menos rentables en todos los casos, y simplificación de restricciones, por eliminación de aquellas que son menos restrictivas en todos los casos.

Indicaremos primeramente el procedimiento general a seguir para obtener la máxima simplificación posible.

Si hubiéramos escogido las unidades de cada actividad de tal forma que dieran todas el mismo beneficio unitario, por ejemplo 10.000 pesetas en nuestro caso, entonces es fácil comparar unas actividades con otras en términos de sus exigencias en los factores limitativos (tierra, mano de obra en las distintas épocas, etc.). En términos más precisos, diríamos que el vector columna P_i correspondiente a la actividad i resulta siempre más ventajoso que el vector columna P_j, relativo a la actividad j, cuando a igualdad de beneficio unitario los elementos de la columna P_i son menores, o en algunos casos iguales, que sus correspondientes en la columna P_j. En tal caso nunca aparecería la actividad P_j en el programa óptimo; por tanto, es mejor eliminarla desde el principio para evitar cálculos inútiles y onerosos.

La simplificación de restricciones se hace refiriendo todas ellas a un mismo nivel absoluto de disponibilidades, por ejemplo, 100 (bastará dividir cada una de ellas por su b_i correspondiente y multiplicar por 100). Diremos que una ecuación es más restrictiva que otra cuando todos sus elementos para un mismo b_i (es decir, una vez hecho comparables reduciendo las cifras originales de ambas a porcentajes) son iguales o mayores (al menos uno debe de ser mayor) que los correspondientes de la otra. Se trata, igualmente, de dos vectores líneas a comparar. Naturalmente, dejaremos la ecuación más restrictiva en el programa y rechazaremos la menos restrictiva por inoperante.

Resumiendo, pues, si dividimos cada elemento de la matriz original (constituída por todas las restricciones en su forma original) por el beneficio unitario correspondiente a su columna y por el b_i correspondiente a su fila y multiplicamos por una constante: 100, 1.000, 10.000, etc. (sin más objeto que hacer que queden números de cómodo manejo, para evitar el tener que trabajar con demasiadas cifras decimales), obtenemos una nueva matriz, que llamaremos «matriz normalizada». Esta matriz es fácilmente simplificable: columnas con elementos mayores (o iguales) a eliminar, filas con elementos menores (o iguales) a eliminar también. Naturalmente que cuando dos actividades, representadas por sus vectores columnas, en la matriz normalizada tienen todos sus elementos homólogos iguales, ambas resultan intercambiables en cualquier proporción. El caso presenta sólo un interés teórico. Téngase en cuenta que, a efectos de la programación lineal, no serán sino una sola actividad con distintos nombres. Cuando dos restricciones en la matriz normalizada tienen todos sus elementos homólogos iguales, a los efectos de la programación lineal, no se trata sino de una sola restricción. Una sola de ellas sería mantenida.

En el caso que consideramos, es claro que la actividad cebada es siempre menos remuneradora que el trigo, puesto que con las mismas exigencias de mano de obra que aquél produce un beneficio unitario menor, o, si construímos la matriz normalizada, se vería que para un mismo beneficio exigiría mayor cantidad del factor limitante mano de obra. Sin embargo, lo único que podrá retener tal actividad en el programa óptimo es la restricción que nos hemos impuesto de alimentar el ganado de labor con la cebada producida en al menos 1,20 hectáreas de la explotación (restricción *c*-ii). Quiere decirse que sustraeremos 1,20 hectáreas de las 10 hectáreas de la explotación para dedicarlas al cultivo de cebada, quedando, por lo tanto, 8,80 hectáreas a programar.

Por otra parte, como al menos 2,50 hectáreas deberán dedicarse al cultivo de la alfalfa (ver restricción *a*-iii), sustraeremos otras

2,50 hectáreas de la superficie de la explotación, quedando 6,30 hectáreas a programar.

La supresión de la cebada (x_2) en la parte a programar y las 2,50 hectáreas de alfalfa que hemos sustraído al total introducen algunas modificaciones en las ecuaciones restrictivas y en la función objetivo. Estas quedan, definitivamente, de la forma siguiente:

$$Z = 9.679\, x_1 + 10.031\, x_2 + 26.360\, x_3 + 18.762\, x_4 + 6.501\, x_5 + 2.611\, x_6 + 12.714\, x_7$$

Restricción núm. 1:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 6{,}30$$

Restricción núm. 2:

$$x_3 \leqq 3{,}33$$

Restricción núm. 3:

$$1{,}50\, x_1 + 3{,}50\, x_2 + 21{,}60\, x_3 + 8{,}25\, x_4 + 9{,}12\, x_5 + 5{,}75\, x_6 + 4{,}56\, x_7 \leqq 127{,}58$$

Restricción núm. 4:

$$1{,}50\, x_1 + 28{,}50\, x_2 + 10{,}50\, x_3 + 17{,}00\, x_4 + 9{,}12\, x_5 + 5{,}75\, x_6 + 4{,}56\, x_7 \leqq 105{,}70$$

Restricción núm. 5:

$$2{,}00\, x_1 + 12{,}35\, x_2 + 0{,}35\, x_3 + 4{,}75\, x_4 + 9{,}12\, x_5 + 5{,}75\, x_6 + 4{,}56\, x_7 \leqq 135{,}73$$

Restricción núm. 6:

$$0{,}25\, x_1 + 1{,}00\, x_2 + 32{,}00\, x_3 + 9{,}12\, x_5 + 5{,}75\, x_6 + 4{,}56\, x_7 \leqq 149{,}70$$

Restricción núm. 7:

$$- x_4 + 0{,}22\, x_5 + 0{,}02\, x_6 \leqq 2{,}50$$

Restricción núm. 8:

$$x_7 \leqq 1$$

Todas estas ecuaciones figuran ordenadamente dispuestas en el cuadro número 1. Las disponibilidades de mano de obra que figuran son las que resultan de descontar a las 150 jornadas disponibles en cada época del año las relativas a 1,20 hectáreas de cebada y 2,50 hectáreas de alfalfa.

En relación a la alfalfa, debe constarse que se ha considerado a este cultivo como una especulación comercializable, ya que éste es el caso en la región. La alfalfa que se produce en la zona tiene reputación de buena calidad y su comercio y exportación son prácticas frecuentes en la región (9). Se ha, por lo tanto, valorado a precios de mercado, tanto en lo que se refiere a la producción de la misma, como en lo que se refiere a su utilización como piensos del ganado vacuno y del de cerda.

(9) Véase "Estudio económico de un grupo de explotaciones agrícolas de la zona de La Violada", por Enrique Botella y Fúster, REVISTA DE ESTUDIOS AGRO-SOCIALES, número 42, enero-marzo 1963.

CUADRO NÚM. 1

Disposición de los datos del primer programa lineal.

RESTRICCIONES			ACTIVIDADES									
				Especulaciones vegetales				Especulaciones animales				
Grupos	Números	Definiciones	Variables representativas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Disponibilidades	Unidades
			Definiciones	Trigo	Maíz	Remolacha	Alfalfa	Vacas	Cerdos	Aves		
			Unidades	1 Ha.	1 Ha.	1 Ha.	1 Ha.	1 A.	1 A.	100 A.		
			Beneficios unitarios	9.679	10.031	26.360	18.762	6.501	2.611	12.714		
Restricciones sobre la utilización del suelo.	1.	Superficie de suelo disponible ...		1	1	1	1	0	0	0	$\leq$ 6,30	1 Ha.
	2.	Superficie de remolacha		0	0	1	0	0	0	0	$\leq$ 3,33	1 Ha.
Restricciones impuestas por las disponibilidades en mano de obra.	3.	Trabajo disponible en primavera.		1,50	3,50	21,60	8,25	9,12	5,75	4,56	$\leq$ 127,58	1 j.
	4.	Trabajo disponible en verano ...		1,50	28,50	10,50	17,00	9,12	5,75	4,56	$\leq$ 105,70	1 j.
	5.	Trabajo disponible en otoño		2,00	12,35	0,35	4,75	9,12	5,75	4,56	$\leq$ 135,73	1 j.
	6.	Trabajo disponible en invierno..		0,25	1,00	32,00	0	9,12	5,75	4,56	$\leq$ 149,70	1 j.
Restricciones de orden alimenticio.	7.	Superficie mínima de alfalfa....		0	0	0	—1	0,22	0,02	0	$\leq$ 2,50	1 Ha.
Restricciones impuestas por la capacidad de alojamiento de los animales.	8.	Número máximo de aves		0	0	0	0	0	0	1	$\leq$ 1	100 A.

Si introducimos ahora una serie de variables auxiliares: x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, convertiremos las inecuaciones lineales en ecuaciones o igualdades; por ejemplo, la restricción núm. 1 se convierte en la igualdad

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_8 = 6{,}30$$

siendo x_8 una variable auxiliar que representa la superficie de la explotación sin utilizar.

En general, la variable auxiliar x_{7+i} representa las unidades del factor escaso i sin utilizar; así $x_9 = x_{7+2}$ representa las unidades del factor 2: superficie de remolacha sin utilizar, etc.

La primera solución de base del programa lineal que tratamos de resolver se obtiene, pues, directamente:

A-1

	$c_j \rightarrow$ ↓	Solución	P_0	9.679 P_1	10.031 P_2	↓ 26.360 P_3	18.762 P_4	6.501 P_5	2.611 P_6
	0	P_8	6,30	1	1	1	1	0	0
←	0	P_9	3,33	0	0	1	0	0	0
	0	P_{10}	127,58	1,50	3,50	21,60	8,25	9,12	5,75
	0	P_{11}	105,70	1,50	28,50	10,50	17,00	9,12	5,75
	0	P_{12}	135,73	2,00	12,35	0,35	4,75	9,12	5,75
	0	P_{13}	149,70	0,25	1,00	32,00	0	9,12	5,75
	0	P_{14}	2,50	0	0	0	−1	0,22	0,02
	0	P_{15}	1	0	0	0	0	0	0
		$z_j - c_j$	0	−9.679	−10.031	−26.360 ↑	−18.762	−6.501	−2.611

Esta primera solución ($x_8 = 6{,}30$; $x_9 = 3{,}33$; $x_{10} = 127{,}58$; $x_{11} = 105{,}70$; $x_{12} = 135{,}73$; $x_{13} = 149{,}70$; $x_{14} = 2{,}50$; $x_{15} = 1$; $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$) indica que no se ha utilizado ninguno de los factores escasos y que no se ha producido nada. Naturalmente, la función objetivo es nula. Obsérvese que el valor de la función objetivo para cada solución se obtiene en la intersección de la columna P_0 y de la fila $z_j - c_j$, y es igual al resultado de multiplicar cada uno de los valores que figuran en la columna P_0 por su correspondiente c_j a su izquierda y sumar. Los c_j son, naturalmente, los beneficios unitarios conocidos de cada especulación; $c_8 = c_9 = \ldots = c_{15} = 0$, es decir, los beneficios unitarios correspondientes a la no utilización de recursos, son nulos. Cada uno de los demás valores de la fila $z_j - c_j$ se obtiene multiplicando cada uno de los valores que figuran en la columna P_j por los c_j correspondientes que figuran en la primera columna de la izquierda, sumando y al resultado restando el c_j correspondiente que figura en la cabecera de su columna.

Así, por ejemplo:

$$z_4 - c_4 = 1 \times 0 + 0 \times 0 + 8{,}25 \times 0 + 17{,}00 \times 0 + 4{,}75 \times 0 + 0 \times 0 + (-1) \times 0 + \\ + 0 \times 0 - 18.762 = -18.762$$

Como todos los c_j correspondientes a los valores no-nulos de las variables, es decir, los que figuran en la primera columna de

A-1

12.714	0	0	0	0	0	0	0	0	
P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	R
0	1	0	0	0	0	0	0	0	6,30
0	0	1	0	0	0	0	0	0	3,33 →
4,56	0	0	1	0	0	0	0	0	5,90
4,56	0	0	0	1	0	0	0	0	10,05
4,56	0	0	0	0	1	0	0	0	387,90
4,56	0	0	0	0	0	1	0	0	4,67
0	0	0	0	0	0	0	1	0	∞
1	0	0	0	0	0	0	0	1	∞
−12.714	0	0	0	0	0	0	0	0	

la izquierda, son nulos, todos los z_j serán nulos y quedará $z_j - c_j = -c_j$, de donde los coeficientes de la función $z_j - c_j$ se obtienen directamente cambiando de signo los c_j correspondientes que figuran en la primera fila.

Naturalmente que esta primera solución de base está muy lejos de la solución óptima que hace máxima la función $z_j - c_j$. En efecto, hay siete coeficientes $z_j - c_j$ negativos y la solución óptima no se encontrará hasta que todos los valores que figuran en la fila $z_j - c_j$ sean positivos o nulos, es decir, no negativos.

Se observa que el mayor $z_j - c_j$ negativo es -26.360 correspondiente al vector columna P_3, que representa la actividad remolacha. Quiere decirse que habremos de introducir el cultivo de la remolacha en nuestro segundo cuadro, o iteración. Veamos a qué actividad P_3 deberá reemplazar en la solución.

En la columna R hemos hallado el cociente de dividir cada valor de P_0 por su correspondiente en P_3. El menor valor positivo resulta ser 3,33 correspondiente a P_9 (no utilización de remolacha). El vector P_3 figurará, pues, en la solución en lugar del vector P_9.

¿Cómo se obtiene la segunda iteración? En forma sistemática, procediendo como se indicó al demostrar la validez del método simplex en la primera parte de este trabajo. En lugar de describir paso por paso las operaciones aritméticas que es preciso realizar para pasar del cuadro A-1 al cuadro A-2, como es desafortunada costumbre en los textos de programación lineal, nos limitaremos a explicar que se trata de convertir el sistema de ecuaciones representado esquemáticamente por el cuadro A-1 en otro sistema equivalente en el que figurará P_3 en la solución en lugar de P_9. Sabemos que podemos dividir todos los elementos de una fila por un mismo número sin que varíe la ecuación; también podemos multiplicar los elementos de una fila por un número y restarles después los de otra fila, etc. Observemos que lo que caracteriza a un vector columna que figura en la solución es el hecho de que se compone de la unidad en la intersección de su

A-2

$c_j \rightarrow$ ↓	Solución	P_0	9.679 P_1	10.031 P_2	26.360 P_3	18.762 P_4	6.501 P_5	2.611 P_6
0	P_8	2,97	1	1	0	1	0	0
26.360	P_3	3,33	0	0	1	0	0	0
0	P_{10}	55,6520	1,50	3,50	0	8,25	9,12	5,75
0	P_{11}	70,7350	1,50	28,50	0	17,00	9,12	5,75
0	P_{12}	134,5645	2,00	12,35	0	4,75	9,12	5,75
0	P_{13}	43,14	0,25	1,00	0	0	9,12	5,75
0	P_{14}	2,50	0	0	0	−1	0,22	0,02
0	P_{15}	1	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	87.779	−9.679	−10.031	0	−18.762	−6.501	−2.611

columna con la fila donde figura como solución y que los demás elementos son nulos. Así, pues, se trata ahora de obtener en el nuevo cuadro, en la columna P_3, los valores $(0, 1, 0, 0, \ldots, 0)^*$, para lo cual haremos las operaciones necesarias, dentro, naturalmente, de las permitidas, es decir, a base de combinaciones lineales de las filas de la matriz.

La nueva fila P_3 se obtiene inmediatamente, pues bastaría con dividir todos los elementos de la antigua P_9 por el coeficiente que figura en la intersección de P_3 y P_9. Como éste es la unidad, resulta que la nueva fila P_3 en el cuadro A-2 se compone de los mismos elementos que la antigua P_9.

¿Cómo se obtienen las demás filas? Teniendo en cuenta que todos los elementos de la columna P_3 deben ser ceros. Así, por ejemplo, la primera fila P_8 del cuadro A-2 se hallará sin más que restar la fila nueva P_3 (o, lo que es lo mismo, la antigua P_9) a la antigua fila P_8. La nueva fila P_{10} se obtendrá restando a la antigua fila P_{10} el resultado de multiplicar los elementos de la nueva fila P_3 por 21,60; etc., etc.

De esta forma obtendremos el cuadro A-2.

El valor de la función objetivo es ya de 87.779 pesetas, lo que representa una considerable mejora sobre el programa anterior. ¿Qué comporta esta nueva solución? La utilización de 3,33 hec-

* Representamos vectores columna en forma horizontal por imperativos de espacio, pero téngase bien presente que se refierén a columnas dé los distintos cuadros y no a filas.

A-2

12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	0 P_{14}	0 P_{15}	R	
0	1	−1	0	0	0	0	0	0	2,97	→
0	0	1	0	0	0	0	0	0	∞	
4,56	0	−21,60	1	0	0	0	0	0	6,73	
4,56	0	−10,50	0	1	0	0	0	0	4,15	
4,56	0	−0,35	0	0	1	0	0	0	28,40	
4,56	0	−32,00	0	0	0	1	0	0	∞	
0	0	0	0	0	0	0	1	0	−2,50	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	∞	
−12.714	0	26.360	0	0	0	0	0	0		

táreas de remolacha, que es el máximo de superficie que puede dedicarse a este cultivo en la explotación que programamos. Observamos que esta solución deja 2,97 hectáreas sin cultivar (P_8), 55,65 jornadas de trabajo no utilizadas en primavera (P_{10}), etc. El programa es susceptible de mejoras, ya que en la nueva fila $z_j - c_j$ hay todavía 6 coeficientes negativos. El mayor en valor absoluto, 18.762, corresponde a la nueva actividad P_4 (alfalfa) a introducir en la solución. La actividad a arrojar de la solución es P_8 (no utilización de la superficie de la explotación), ya que corresponde al valor positivo de R más pequeño.

En forma semejante a como obtuvimos el cuadro A-2 a partir de A-1, se obtendrá el nuevo cuadro A-3 a partir de A-2. Recordamos que se trata de obtener una nueva columna P_4 compuesta de los elementos $(1, 0, \ldots, 0)$, para lo cual la primera fila, la nueva P_4, es exactamente la misma que la antigua P_8, ya que también esta vez el coeficiente intersección $P_8 - P_4$ en el cuadro A-2 es la unidad. La nueva fila P_3 no ha cambiado tampoco, ya que en el lugar correspondiente a la columna P_4 había un cero. La nueva P_{10} se formará restando a la anterior P_{10} los elementos de la nueva fila P_4 multiplicados por 8,25; etc., etc.

El nuevo cuadro A-3 muestra la nueva solución (2,97 hectáreas de alfalfa y 3,33 hectáreas de remolacha), que representa un beneficio bruto de 143.502 pesetas, considerablemente mejor que el anterior.

A-3

	$c_j \rightarrow$ / $\downarrow$	Solución	P_0	9.679 P_1	10.031 P_2	26.360 P_3	18.762 P_4	6.501 P_5	2.611 P_6
	18.762	P_4	2,97	1	1	0	1	0	0
	26.360	P_3	3,33	0	0	1	0	0	0
	0	P_{10}	31,1495	−6,75	−4,75	0	0	9,12	5,75
	0	P_{11}	20,2450	−15,50	11,50	0	0	9,12	5,75
	0	P_{12}	120,4570	−2,75	7,60	0	0	9,12	5,75
	0	P_{13}	43,14	0,25	1,00	0	0	9,12	5,75
	0	P_{14}	5,47	1	1	0	0	0,22	0,02
←	0	P_{15}	1	0	0	0	0	0	0
		$z_j - c_j$	143.502	9.083	8.731	0	0	−6.501	−2.611

Aún quedan varios (3, exactamente) coeficientes negativos en la fila $z_j - c_j$, lo que indica que aún no hemos hallado la solución óptima. Por otra parte, aún quedan cantidades respetables de los distintos factores sin utilizar. La nueva actividad a introducir es P_7 (aves), que tiene el mayor, en valor absoluto, coeficiente negativo, 12.714, y la actividad a arrojar de la solución es P_{15} (no utilización de las aves), correspondiente al menor valor de R.

En forma semejante puede obtenerse el nuevo cuadro A-4, cuya solución (2,97 hectáreas de alfalfa, 3,33 hectáreas de remolacha y 100 gallinas) representa un beneficio bruto de 156.216 pesetas, superior al obtenido anteriormente. No obstante, el programa es aún susceptible de mejoras, como lo prueban dos coeficientes negativos de $z_j - c_j$. El mayor, en valor absoluto, 6.501, corresponde a la nueva actividad P_5 (vacas lecheras), que convendrá introducir en la solución. La actividad a arrojar de la solución es ahora P_{11} (no utilización del trabajo disponible en verano).

Se obtiene así el cuadro A-5.

La nueva solución: 2,97 hectáreas de alfalfa, 3,33 hectáreas de remolacha, 1,72 vacas lecheras y 100 gallinas, representa un beneficio bruto de 167.396 pesetas, superior a los anteriores. Un solo coeficiente negativo en la fila $z_j - c_j$ indica que aún no es la solución óptima. Nueva actividad a introducir: P_1 (trigo), y ac-

A-3

↓ 12.714	0	0	0	0	0	0	0	0		
P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	R	
0	1	−1	0	0	0	0	0	0	∞	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	∞	
4,56	−8,25	−13,35	1	0	0	0	0	0	6,82	
4,56	−17,00	6,50	0	1	0	0	0	0	4,44	
4,56	−4,75	4,40	0	0	1	0	0	0	26,40	
4,56	0	−32,00	0	0	0	1	0	0	9,46	
0	1	−1	0	0	0	0	1	0	∞	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	→
−12.714 ↑	18.762	7.598	0	0	0	0	0			

A-4

$c_j \rightarrow$ ↓	Solución	P_0	9.679 P_1	10.031 P_2	26.360 P_3	18.762 P_4	↓ 6.501 P_5	2.611 P_6
18.762	P_4	2,97	1	1	0	1	0	0
26.360	P_3	3,33	0	0	1	0	0	0
0	P_{10}	26,5895	− 6,75	−4,75	0	0	9,12	5,75
← 0	P_{11}	15,6850	−15,50	11,50	0	0	9,12	5,75
0	P_{12}	115,8970	−2,75	7,60	0	0	9,12	5,75
0	P_{13}	38,58	0,25	1,00	0	0	9,12	5,75
0	P_{14}	5,47	1	1	0	0	0,22	0,02
12.714	P_7	1	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	156.216	9.083	8.731	0	0	−6.501 ↑	−2.611

A-5

$c_j \rightarrow$ ↓	Solución	P_0	↓ 9.679 P_1	10.031 P_2	26.360 P_3	18.762 P_4	6.501 P_5	2.611 P_6
18.762	P_4	2,97	1	1	0	1	0	0
26.360	P_3	3,33	0	1	1	0	0	0
← 0	P_{10}	10,9045	8,75	−16,25	0	0	0	0
6.501	P_5	1,7198	−1,6995	1,2609	0	0	1	0,6304
0	P_{12}	100,2120	12,75	−3,90	0	0	0	0
0	P_{13}	22,8950	15,75	−10,50	0	0	0	0
0	P_{14}	5,0916	1,3739	0,7226	0	0	0	−0,1187
12.714	P_7	1	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	167.396	−1.965 ↑	16.928	0	0	0	1.487

tividad a arrojar: P_{10} (no utilización del trabajo disponible en primavera).

El nuevo cuadro A-6 representa, por fin, la solución óptima:

1,72 hectáreas de alfalfa,
3,33 hectáreas de remolacha,
1,25 hectáreas de trigo,
3,84 vacas lecheras,
100 gallinas;

A-4

12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	0 P_{14}	0 P_{15}	R	
0	1	−1	0	0	0	0	0	0	∞	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	∞	
0	−8,25	−13,35	1	0	0	0	0	−4,56	2,91	
0	−17,00	6,50	0	1	0	0	0	−4,56	1,72	→
0	−4,75	4,40	0	0	1	0	0	−4,56	12,71	
0	0	−32,00	0	0	0	1	0	−4,56	4,23	
0	1	−1	0	0	0	0	1	0	24,86	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	∞	
0	18.762	7.598	0	0	0	0	0	12.714		

A-5

714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	0 P_{14}	0 P_{15}	R	
0	1	−1	0	0	0	0	0	0	2,97	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	∞	
0	8,75	−19,85	1	−1	0	0	0	0	1,25	→
0	−1,8640	0,7127	0	0,1096	0	0	0	−0,5000	−1,01	
0	12,25	−2,10	0	−1	1	0	0	0	7,86	
0	0	−38,50	0	−1	0	1	0	0	1,45	
0	1,4101	−1,1568	0	−0,0241	0	0	1	0,11	3,70	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	∞	
0	6.644	12.231	0	712	0	0	0	9.463		

y el beneficio bruto correspondiente es de 169.845 pesetas.

¿Cuáles son los factores utilizados totalmente en este programa óptimo? La superficie de la explotación, la superficie máxima de remolacha, la capacidad de alojamiento de las aves y las jornadas de trabajo disponibles en primavera y verano. Quedan sin utilizar 84 jornadas de trabajo en otoño y 3 jornadas en invierno. Esto representa, aproximadamente, un 15 por 100 de las disponibilidades totales de trabajo. Como no se han tenido en cuenta

A-6

$c_j \rightarrow$ $\downarrow$	Solución	P_0	9.679 P_1	10.031 P_2	26.360 P_3	18.762 P_4	6.501 P_5	2.611 P_6
18.762	P_4	1,7238	0	2,8571	0	1	0	0
26.360	P_3	3,33	0	0	1	0	0	0
9.679	P_1	1,2462	1	−1,8571	0	0	0	0
6.501	P_5	3,8377	0	−1,8961	0	0	1	0,6304
0	P_{12}	84,3229	0	19,7780	0	0	0	0
0	P_{13}	3,2673	0	18,7493	0	0	0	0
0	P_{14}	3,3794	0	3,2741	0	0	0	−0,1187
12.714	P_7	1	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	169.845	0	13.272	0	0	0	1.487

las necesidades de trabajo en tareas de interior, reparaciones, pintura, etc., esta cifra puede ser suficiente para cubrir tales necesidades. El programa óptimo obtenido representa, pues, prácticamente, el pleno empleo de los factores disponibles.

Recuérdese que a la solución obtenida debe añadirse 1,20 hectáreas de cebada y 2,50 hectáreas de alfalfa, por lo que la óptima organización de la producción de la explotación considerada consistiría en:

1,25 hectáreas de trigo,
1,20 hectáreas de cebada,
3,33 hectáreas de remolacha,
4,22 hectáreas de alfalfa,
4 vacas lecheras (redondeando),
100 gallinas.

El beneficio bruto total obtenido sería igual a

$$169.845 + 1,20 \times 6.889 + 2,50 \times 18.762 = 225.017 \text{ pesetas.}$$

El valor de la producción bruta de la explotación óptima sería:

$$1,25 \times 16.800 + 1,20 \times 13.050 + 3,33 \times 39.360 + 3,34 \times 28.600 +$$
$$+ 4 \times 26.214 + 1 \times 55.120 = 423.229 \text{ pesetas,}$$

de la que ya hemos descontado 0,88 hectáreas de alfalfa para la alimentación de las vacas. Si descontamos el reempleo (cebada,

A-6

12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	0 P_{14}	0 P_{15}
0	0	1,2685	−0,1142	0,1142	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	−2,2685	0,1142	−0,1142	0	0	0	0
0	−0,1645	−3,1426	0,1940	−0,0845	0	0	0	−0,50
0	−0,50	26,8234	−1,4560	0,4560	1	0	0	0
0	−15,75	−2,7711	−1,7986	0.7986	0	1	0	0
0	0,0362	1,9599	−0,1569	0,1328	0	0	1	0,11
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	8.610	7.773	224	488	0	0	0	9.463

semillas), nos queda como valor de la producción final: 401.076 pesetas, es decir, unas 400.000 pesetas en números redondos.

Corresponde, pues, a un valor de producción final de 40.000 pesetas por hectárea, bastante elevado si se lo compara con las 20.000 pesetas por hectárea obtenido en las mejores explotaciones de la zona (10).

La productividad media del trabajo resulta ser de 200.000 pesetas/U. T. H., o bien de 667 pesetas/jornada de trabajo, bastante satisfactoria.

4. Influencia de un aumento en las disponibilidades de mano de obra.

Supongamos la misma explotación de 10 hectáreas de regadío con las mismas restricciones agronómicas, pero con 3 U. T. H. disponibles, en lugar de las 2 U. T. H. del caso estudiado. Significa que disponemos ahora de un total de 900 jornadas de trabajo disponibles, en lugar de 600 jornadas.

El planteamiento del problema es el mismo. El cuadro núm. 1, que representaba la disposición de los datos para el primer pro-

(10) Véase "Estudio económico de un grupo de explotaciones agrícolas de la zona de La Violada", por Enrique Botella y Fúster, Revista de Estudios Agro-Sociales, número 42, enero-marzo 1963.

grama lineal, es el mismo con la salvedad de que ahora, en lugar de 127,58; 105,70; 135,73 y 149,70 como disponibilidades de trabajo tendremos: 202,58; 180,70; 210,73 y 224,70 jornadas dispo-

B-1

	$c_j \rightarrow$ ↓	Solución	P_0	9.679 P_1	10.031 P_2	↓ 26.360 P_3	18.762 P_4	6.501 P_5	2.611 P_6
	0	P_8	6,30	1	1	1	1	0	0
←	0	P_9	3,33	0	0	1	0	0	0
	0	P_{10}	202,58	1,50	3,50	21,60	8,25	9,12	5,75
	0	P_{11}	180,70	1,50	28,50	10,50	17,00	9,12	5,75
	0	P_{12}	210,73	2,00	12,35	0,35	4,75	9,12	5,75
	0	P_{13}	224,70	0,25	1,00	32,00	0	9,12	5,75
	0	P_{14}	2,50	0	0	0	−1	0,22	0,02
	0	P_{15}	1	0	0	0	0	0	0
		$z_j - c_j$	0	−9.679	−10.031	−26.360 ↑	−18.762	−6.501	−2.611

B-2

	$c_j \rightarrow$ ↓	Solución	P_0	9.679 P_1	10.031 P_2	26.360 P_3	↓ 18.762 P_4	6.501 P_5	2.611 P_6
←	0	P_8	2,97	1	1	0	1	0	0
	26.360	P_3	3,33	0	0	1	0	0	0
	0	P_{10}	130,6520	1,50	3,50	0	8,25	9,12	5,75
	0	P_{11}	145,7350	1,50	28,50	0	17,00	9,12	5,75
	0	P_{12}	209,5645	2,00	12,35	0	4,75	9,12	5,75
	0	P_{13}	118,1400	0,25	1,00	0	0	9,12	5,75
	0	P_{14}	2,50	0	0	0	−1	0,22	0,02
	0	P_{15}	1	0	0	0	0	0	0
		$z_j - c_j$	87.779	−9.679	−10.031	0	−18.762 ↑	−6.501	−2.611

nibles en primavera, verano, otoño e invierno, respectivamente.

Las distintas soluciones obtenidas desde la solución de base hasta la solución óptima figuran en los cuadros B-1 a B-6:

B-1

12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	0 P_{14}	0 P_{15}	R
0	1	0	0	0	0	0	0	0	6,30
0	0	1	0	0	0	0	0	0	3,33 →
4,56	0	0	1	0	0	0	0	0	9,38
4,56	0	0	0	1	0	0	0	0	17,21
4,56	0	0	0	0	1	0	0	0	602,08
4,56	0	0	0	0	0	1	0	0	7,02
0	0	0	0	0	0	0	1	0	∞
1	0	0	0	0	0	0	0	1	∞
−12.714	0	0	0	0	0	0	0	0	

B-2

12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	0 P_{14}	0 P_{15}	R
0	1	−1	0	0	0	0	0	0	2,97 →
0	0	1	0	0	0	0	0	0	∞
4,56	0	−21,60	1	0	0	0	0	0	15,84
4,56	0	−10,50	0	1	0	0	0	0	8,57
4,56	0	−0,35	0	0	1	0	0	0	44,12
4,56	0	−32,00	0	0	0	1	0	0	∞
0	0	0	0	0	0	0	1	0	−2,50
1	0	0	0	0	0	0	0	1	∞
−12.714	0	26.360	0	0	0	0	0	0	

B-3

$c_j \rightarrow$ $\downarrow$	Solución	P_0	9.679 P_1	10.031 P_2	26.360 P_3	18.762 P_4	6.501 P_5	2.611 P_6
18.762	P_4	2,97	1	1	0	1	0	0
26.360	P_3	3,33	0	0	1	0	0	0
0	P_{10}	106,1495	−6,75	−4,75	0	0	9,12	5,75
0	P_{11}	95,2450	−15,50	11,50	0	0	9,12	5,75
0	P_{12}	195,4570	−2,75	7,60	0	0	9,12	5,75
0	P_{13}	118,1400	0,25	1,00	0	0	9,12	5,75
0	P_{14}	5,47	1	1	0	0	0,22	0,02
← 0	P_{15}	1	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	143.502	9.083	8.731	0	0	−6.501	−2.611

B-4

$c_j \rightarrow$ $\downarrow$	Solución	P_0	9.679 P_1	10.031 P_2	26.360 P_3	18.762 P_4	↓ 6.501 P_5	2.611 P_6
18.762	P_4	2,97	1	1	0	1	0	0
26.360	P_3	3,33	0	0	1	0	0	0
0	P_{10}	101,5895	−6,75	−4,75	0	0	9,12	5,75
← 0	P_{11}	90,6850	−15,50	11,50	0	0	**9,12**	5,75
0	P_{12}	190,8970	−2,75	7,60	0	0	9,12	5,75
0	P_{13}	113,5800	0,25	1,00	0	0	9,12	5,75
0	P_{14}	5,47	1	1	0	0	0,22	0,02
12.714	P_7	1	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	156.216	9.083	8.731	0	0	−6.501 ↑	−2.611

B-5

$c_j \rightarrow$ $\downarrow$	Solución	P_0	↓ 9.679 P_1	10.031 P_2	26.360 P_3	18.762 P_4	6.501 P_5	2.611 P_6
18.762	P_4	2,97	1	1	0	1	0	0
26.360	P_3	3,33	0	0	1	0	0	0
← 0	P_{10}	10,9045	**8,75**	−16,25	0	0	0	0
6.501	P_5	9,9435	−1,6995	1,2609	0	0	1	0,6304
0	P_{12}	100,2120	12,75	−3,90	0	0	0	0
0	P_{13}	22,8950	15,75	−10,50	0	0	0	0
0	P_{14}	3,2824	1,3739	0,7226	0	0	0	−0,1187
12.714	P_7	1	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	220.859	−1.965 ↑	16.928	0	0	0	1.487

B-3

12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	0 P_{14}	0 P_{15}	R	
0	1	−1	0	0	0	0	0	0	∞	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	∞	
4,56	−8,25	−13,35	1	0	0	0	0	0	23,28	
4,56	−17,00	6,50	0	1	0	0	0	0	20,89	
4,56	−4,75	4,40	0	0	1	0	0	0	42,86	
4,56	0	−32,00	0	0	0	1	0	0	25,91	
0	1	−1	0	0	0	0	1	0	∞	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	→
−12.714	18.762	7.598	0	0	0	0	0	0		

B-4

12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	0 P_{14}	0 P_{15}	R	
0	1	−1	0	0	0	0	0	0	∞	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	∞	
0	−8,25	−13,35	1	0	0	0	0	−4,56	11,14	
0	−17,00	6,50	0	1	0	0	0	−4,56	9,94	→
0	−4,75	4,40	0	0	1	0	0	−4,56	20,93	
0	0	−32,00	0	0	0	1	0	−4,56	12,45	
0	1	−1	0	0	0	0	1	0	24,86	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	∞	
0	18.762	7.598	0	0	0	0	0	12.714		

B-5

12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	0 P_{14}	0 P_{15}	R	
0	1	−1	0	0	0	0	0	0	2,97	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	∞	
0	8,75	−19,85	1	−1	0	0	0	0	1,25	→
0	−1,8640	0,7127	0	0,1096	0	0	0	−0,50	−5,85	
0	12,25	−2,10	0	−1	1	0	0	0	7,86	
0	0	−38,50	0	−1	0	1	0	0	1,45	
0	1,4101	−1,1568	0	−0,0241	0	0	1	0,11	2,39	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	∞	
0	6.644	12.231	0	712	0	0	0	9.463		

B-6

$c_j \rightarrow$ ↓	Solución	P_0	9.679 P_1	10.031 P_2	26.360 P_3	18.762 P_4	6.501 P_5	2.611 P_6
18.762	P_4	1,7238	0	2,8571	0	1	0	0
26.360	P_3	3,33	0	0	1	0	0	0
9.679	P_1	1.2462	1	−1,8571	0	0	0	0
6.501	P_5	12,0614	0	−1,8961	0	0	1	0,6304
0	P_{12}	84,3229	0	19,7780	0	0	0	0
0	P_{13}	3,2673	0	18,7493	0	0	0	0
0	P_{14}	1,5702	0	3,2741	0	0	0	−0,1187
12.714	P_7	1	0	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	223.308	0	13.272	0	0	0	1.487

La solución óptima obtenida en este programa resulta estar constituída por:

1,72 hectáreas de alfalfa,
3,33 hectáreas de remolacha,
1,25 hectáreas de trigo,
12 vacas lecheras,
100 gallinas.

Que, teniendo en cuenta las 1,20 hectáreas de cebada y 2,50 hectáreas de alfalfa, se convierte en:

1,25 hectáreas de trigo,
1,20 hectáreas de cebada,
3,33 hectáreas de remolacha,
4,22 hectáreas de alfalfa,
12 vacas lecheras,
100 gallinas.

Es curioso constatar que se trata en esencia del mismo sistema de producción, con las mismas especulaciones, la misma superficie dedicada a los mismos cultivos, con la sola diferencia del aumento del número de cabezas de ganado vacuno.

El aumento que representa el beneficio bruto de este nuevo programa de producción de la explotación con relación al anterior es de 223.308 − 169.845 = 53.463 pesetas.

Se deduce de los resultados de este nuevo programa la conveniencia de explotar el ganado vacuno en aquellas explotaciones

B-6

12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	0 P_{14}	0 P_{15}
0	0	1,2685	−0,1142	0,1142	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	−2,2685	0,1142	−0,1142	0	0	0	0
0	−0,1645	−3,1426	0,1940	−0,0845	0	0	0	−0,50
0	−0,50	26,8234	−1,4560	0,4560	1	0	0	0
0	−15,75	−2,7711	−1,7986	0,7986	0	1	0	0
0	0,0362	1,9599	−0,1569	0,1328	0	0	1	0,11
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	8.610	7.773	224	488	0	0	0	9.463

de la zona de La Violada que cuentan con más brazos disponibles en la explotación. La conveniencia de mantener un trabajador fijo en la explotación —un vaquero, por ejemplo— viene determinada por la relación (o la diferencia) entre las 53.463 pesetas de aumento en los beneficios brutos y el salario del trabajador. La productividad marginal de esta U. T. H. adicional es de 53.463 pesetas/U. T. H., o, de otro modo, 178 pesetas/jornada. En otras palabras, interesará contratar un vaquero siempre que éste reciba un jornal (metálico y especie) inferior a las 175 pesetas.

El valor de la producción final en este caso es de 560.452 pesetas, correspondiente a 56.000 pesetas/hectárea, o a 186.817 pesetas/U. T. H. Se observa, pues, como era de esperar, una mayor intensidad productiva por hectárea y una menor productividad media del trabajo con relación al caso anterior.

5. Determinación del tamaño óptimo de las explotaciones de La Violada.

Vamos a determinar a continuación el tamaño óptimo de las explotaciones en la zona de La Violada. Supongamos que se dispone de 2 U. T. H. por explotación, es decir, de un total de 600 jornadas de trabajo al año. Las mismas restricciones sobre superficie de cebada para la alimentación del ganado de labor, disponibilidades de trabajo en las distintas épocas del año y número máximo de aves persisten. El problema de los imperativos agronómicos vamos a resolverlo de otra forma, considerando ahora como actividades no las especulaciones: trigo, maíz, etc., sino las rotaciones de cultivo R_1, R_2, R_3 y R_4, definidas como sigue:

R_1, constituída por: trigo-remolacha-alfalfa.
R_2, constituída por: trigo-maíz-remolacha-alfalfa.
R_3, constituída por: trigo-trigo-maíz-remolacha-alfalfa.
R_4, constituída por: trigo-maíz-remolacha-alfalfa-alfalfa.

Otra diferencia sobre el programa lineal anterior es el hecho de que ahora no vamos a considerar la alfalfa como producto comercializable, de manera que su única utilización posible va a ser la alimentación del ganado de renta de la explotación. ¿Cómo expresar esta nueva inecuación? Si x_1, x_2, x_3, x_4 representan las hectáreas de R_1, R_2, R_3, R_4, respectivamente, en la solución, se tendrá:

$$0{,}22\,x_5 + 0{,}02\,x_6 \leqq 0{,}33\,x_1 + 0{,}25\,x_2 + 0{,}20\,x_3 + 0{,}40\,x_4$$

siendo 0,33; 0,25; 0,20 y 0,40 las hectáreas de alfalfa que hay en una hectárea de las rotaciones R_1, R_2, R_3 y R_4, respectivamente. Esta inecuación podremos expresarla así:

$$-\,0{,}33\,x_1 - 0{,}25\,x_2 - 0{,}20\,x_3 - 0{,}40\,x_4 + 0{,}22\,x_5 + 0{,}02\,x_6 \leqq 0$$

Pero si la alfalfa no es comercializable, entonces no habrá un valor de su producción, mas sí un coste de producción, y, por lo tanto, el beneficio bruto unitario será igual a los gastos directos unitarios con signo negativo, es decir, −9.838 pesetas.

Teniendo en cuenta la composición de cada rotación, es fácilmente calculable el beneficio bruto unitario y las exigencias en mano de obra por hectárea de rotación. He aquí los resultados:

	R_1	R_2	R_3	R_4
Beneficio unitario (ptas/Ha.).	8.734	9.058	9.182	5.274
Exigencias en mano de obra (jornadas/Ha.):				
Primavera	10,45	8,71	7,27	8,62
Verano	9,67	14,25	11,70	14,80
Otoño	2,37	4,86	4,29	4,84
Invierno	10,75	8,31	6,70	6,65

CUADRO NÚM. 2

Disposición de los datos del programa lineal para la determinación del tamaño óptimo de las explotaciones.

RESTRICCIONES			ACTIVIDADES									
				Especulaciones vegetales (Rotaciones)				Especulaciones animales				
Grupos	Números	Definiciones	Variables representativas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Disponibilidades	Unidades
			Definiciones	R_1 (tra)	R_2 (tmra)	R_3 (ttmra)	R_4 (tmraa)	Vacas	Cerdos	Aves		
			Unidades	1 Ha.	1 Ha.	1 Ha.	1 Ha.	1 A.	1 A.	100 A.		
			Beneficios unitarios	8.734	9.058	9.182	5.279	13.071	3.250	12.714		
Restricciones impuestas por las disponibilidades en mano de obra.	1.	Trabajo disponible en primavera.		10,45	8,71	7,27	8,62	9,12	5,75	4,56	$\leq$ 148,20	1 j.
	2.	Trabajo disponible en verano ...		9,67	14,25	11,70	14,80	9,12	5,75	4,56	$\leq$ 148,20	1 j.
	3.	Trabajo disponible en otoño		2,37	4,86	4,29	4,84	9,12	5,75	4,56	$\leq$ 147,60	1 j.
	4.	Trabajo disponible en invierno..		10,75	8,31	6,70	6,65	9,12	5,75	4,56	$\leq$ 149,70	1 j.
Restricciones de orden alimenticio.	5.	Superficie mínima de alfalfa....		−0,33	−0,25	−0,20	−0,40	0,22	0,02	0	$\leq$ 0	1 Ha.
Restricciones impuestas por la capacidad de alojamiento de los animales.	6.	Número máximo de aves		0	0	0	0	0	0	1	$\leq$ 1	100 A.

Los datos esenciales para la resolución del programa figuran en el cuadro núm. 2. Se observará que los beneficios unitarios relativos al ganado vacuno y de cerda son superiores a los que figuraban en el cuadro núm. 1. La explicación es sencilla: la alfalfa necesaria para la alimentación del ganado, que constituía parte de los gastos directos en el primer programa, valorada a precios de mercado, no constituye ahora tal gasto directo, ya que ha de obtenerse integralmente en la explotación. Esta reducción en los gastos directos, a igualdad del valor de la producción, representa mayores beneficios.

Las disponibilidades totales de trabajo en primavera, verano, otoño e invierno son las mismas 150 jornadas, de las que hay que descontar las necesarias para cultivar 1,20 hectáreas de cebada.

Naturalmente, en este programa no existe limitación en cuanto a la superficie física de la explotación, que es precisamente lo que nos interesa determinar. Obsérvese, pues, cómo la programación lineal sirve para la determinación del tamaño óptimo de la explotación: se construye un programa teniendo en cuenta las disponibilidades de la explotación en factores tales como el trabajo, el capital, capacidad de las construcciones y alojamientos para el ganado, etc.; los imperativos agronómicos, el equilibrio ganado-producción forrajera, etc., y se resuelve. La solución óptima implica la utilización de diversas actividades vegetales y animales. La superficie total cubierta por las especulaciones vegetales nos da directamente el tamaño óptimo de explotación. Entiéndase que se trata de un óptimo, es decir, del valor máximo compatible con

C-1

	$c_j \rightarrow$ ↓	Solución	P_0	8.734 P_1	9.058 P_2	9.182 P_3	5.279 P_4	↓ 13.071 P_5
	0	P_8	148,20	10,45	8,71	7,27	8,62	9,12
	0	P_9	148,20	9,67	14,25	11,70	14,80	9,12
	0	P_{10}	147,60	2,37	4,86	4,29	4,84	9,12
	0	P_{11}	149,70	10,75	8,31	6,70	6,65	9,12
←	0	P_{12}	0	−0,33	−0,25	−0,20	−0,40	**0,22**
	0	P_{13}	1	0	0	0	0	0
		$z_j - c_j$	0	−8.734	−9.058	−9.182	−5.279	−13.071 ↑

las condiciones de la explotación (2 U. T. H. disponibles, determinados rendimientos, precios, gastos directos, etc.).

La ventaja de este procedimiento para determinar el tamaño óptimo de las explotaciones (11) estriba en que no solamente obtenemos la superficie, sino también la organización completa de la producción al mismo tiempo; conocimiento utilísimo para el explotante o para el organismo encargado de orientar el aprovechamiento de los recursos agrícolas de la zona.

A partir del cuadro núm. 2 se obtiene directamente la solución de base, con la introducción de las variables auxiliares $x_8, x_9, \ldots, x_{13}$ (C-1).

Del que se deduce la conveniencia de incluir la actividad P_7 (vacas) en la solución para sustituir a P_{12} (exceso de alfalfa sobre las necesidades de las vacas y cerdos).

El segundo programa (C-2) no mejora el beneficio bruto, cosa a esperar, ya que en él aparecen las vacas al nivel cero, como podía preverse del hecho de que no puede aparecer el ganado aisladamente de la alfalfa. En efecto, la nueva actividad a introducir, P_4 (rotación compuesta de trigo-maíz-remolacha alfalfa-alfalfa), reemplazando a P_9 en la solución, proporciona ya una base alimenticia a las vacas, que en el siguiente programa (C-3) aparecen ya en número de 8,6, aproximadamente, junto con 4,72 hectáreas de la rotación R_4. El beneficio bruto obtenido es

(11) Para el tratamiento de este problema por otros procedimientos, basados en el análisis marginal, véase el artículo "Funciones de producción en agricultura", por Emilio Gómez Manzanares, REVISTA DE ESTUDIOS AGRO-SOCIALES, núm. 48, julio-septiembre 1964.

C-1

3.250 P_6	12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	R
5,75	4,56	1	0	0	0	0	0	16,25
5,75	4,56	0	1	0	0	0	0	16,25
5,75	4,56	0	0	1	0	0	0	16,20
5,75	4,56	0	0	0	1	0	0	16,40
0,02	0	0	0	0	0	1	0	0 →
0	1	0	0	0	0	0	1	∞
−3.250	−12.714	0	0	0	0	0	0	

C-2

$c_j \rightarrow$	Solución	P_0	8.734 P_1	9.058 P_2	9.182 P_3	5.279 P_4	13.071 P_5
0	P_8	148,20	24,13	19,1740	15,5610	25,2020	0
0	P_9	148,20	23,35	24,7140	19,9910	31,3820	0
0	P_{10}	147,60	16,05	15,3240	12,5810	21,4220	0
0	P_{11}	149,70	24,43	18,7740	14,9910	23,2320	0
13,071	P_5	0	−1,50	−1,1361	−0,9091	−1,8182	1
0	P_{13}	1	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	0	−28.340	−23.912	−19.045	−29.045	0

C-3

$c_j \rightarrow$	Solución	P_0	8.734 P_1	9.058 P_2	9.182 P_3	5.279 P_4	13.071 P_5
0	P_8	29,1841	5,3646	−0,6726	−0,4927	0	0
5.279	P_4	4,7224	0,7446	0,7875	0,6370	1	0
0	P_{10}	46,4368	0,0991	−1,5458	−1,0648	0	0
0	P_{11}	37,8892	7,1315	0,4788	0,1923	0	0
13.071	P_5	8,5863	−0,1462	0,2954	0,2491	0	1
0	P_{13}	1	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	137.161	−6.714	−1.040	−2.556	0	0

C-4

$c_j \rightarrow$	Solución	P_0	8.734 P_1	9.058 P_2	9.182 P_3	5.279 P_4	13.071 P_5
0	P_8	28,2959	5,3646	−0,6726	−0,4927	0	0
5.279	P_4	4,5771	0,7446	0,7875	0,6370	1	0
0	P_{10}	44,9894	0,0991	−1,5458	−1,0648	0	0
0	P_{11}	36,7048	7,1315	0,4788	0,1923	0	0
13.071	P_5	8,3221	−0,1462	0,2954	0,2491	0	1
12.714	P_7	1	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	145.655	−6.714	−1.040	−2.563	0	0

C-2

3.250 P_6	12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	R
4,9209	4,56	1	0	0	0	−41,4541	0	5,88
4,9209	4,56	0	1	0	0	−41,4541	0	5,34 →
4,9209	4,56	0	0	1	0	−41,4541	0	6,90
4,9209	4,56	0	0	0	1	−41,4541	0	6,45
0,0909	0	0	0	0	0	4,5454	0	(−)0
0	1	0	0	0	0	0	1	∞
−2.264	−12.714	0	0	0	0	59.413	0	

C-3

3.250 P_6	↓ 12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	R
0,9692	0,8982	1	−0,8039	0	0	−7,9228	0	32,50
0,1568	0,1453	0	0,0319	0	0	−1,3305	0	32,60
1,5619	1,4474	0	−0,6834	1	0	−13,3521	0	32,00
1,2781	1,1844	0	−0,7411	0	1	−10,5439	0	31,90
0,3760	0,2642	0	0,0580	0	0	2,1268	0	32,50
0	1	0	0	0	0	0	1	1 →
2.492	−8.494 ↑	0	926	0	0	20.776	0	

C-4

3.250 P_6	12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	R
0,9692	0	1	−0,8039	0	0	−7,9228	−0,8982	5,29
0,1568	0	0	0,0319	0	0	−1,3305	−0,1453	6,15
1,5619	0	0	−0,6834	1	0	−13,3521	−1,4474	450
1,2781	0	0	−0,7411	0	1	−10,5439	−1,1844	5,13 →
0,3760	0	0	0,0580	0	0	2,1268	−0,2642	−56,8
0	1	0	0	0	0	0	1	∞
2.492	0	0	926	0	0	20.776	8.494	

ya de 137.161 pesetas, lo que, naturalmente, representa una mejora notable sobre el anterior.

La nueva actividad a introducir es P_7 (aves), para reemplazar a P_{13} (no utilización del número máximo de aves) en la solución.

Se obtiene el nuevo programa (C-4), que representa una ligera disminución de la superficie dedicada al cultivo de la rotación R_4, una ligera disminución en el número de cabezas de ganado vacuno y la introducción de 100 gallinas, con un beneficio bruto de 145.655 pesetas, es decir, una mejora de 8.494 pesetas sobre el anterior.

La nueva actividad a introducir es P_1 (rotación 1: trigo-remolacha-alfalfa), que reemplaza a P_{11} (trabajo sin utilizar en invierno).

C-5

	$c_j \rightarrow$ ↓	Solución	P_0	8.734 P_1	9.058 P_2	↓ 9.182 P_3	5.279 P_4	13.071 P_5
	0	P_8	0,6854	0	−1,0326	−0,6370	0	0
←	5.279	P_4	0,7448	0	0,7375	0,6170	1	0
	0	P_{10}	44,4793	0	−1,5524	−1,0675	0	0
	8.734	P_1	5,1468	1	0,0671	0,0269	0	0
	13.071	P_5	9,0746	0	0,3052	0,2530	0	1
	12.714	P_7	1	0	0	0	0	0
		$z_j - c_j$	180.212	0	−589	−2.383 ↑	0	0

C-6

$c_j \rightarrow$ ↓	Solución	P_0	8.734 P_1	9.058 P_2	9.182 P_3	5.279 P_4	13.071 P_5
0	P_8	1,4543	0	−0,2712	0	0,8552	0
9.182	P_3	1,2071	0	1,1952	1	1,3426	0
0	P_{10}	45,7679	0	−0,2765	0	1,4332	0
8.734	P_1	5,1143	1	0,0349	0	−0,0361	0
13.071	P_5	8,7692	0	0,0028	0	−0,3397	1
12.714	P_7	1	0	0	0	0	0
	$z_j - c_j$	183.088	0	2.258	0	2.293	0

El nuevo programa (C-5), con 0,74 hectáreas de rotación R_4, 5,14 hectáreas de rotación R_1, aproximadamente 9 vacas y 100 gallinas, produce un beneficio bruto de 180.212 pesetas, que representa un aumento de 34.557 pesetas sobre el anterior.

La nueva actividad a introducir es P_8 (rotación núm. 3: trigo-trigo-maíz-remolacha-alfalfa), que reemplaza a P_4 (rotación número 4) en la solución.

El nuevo cuadro que se obtiene (C-6) proporciona ya la solución óptima, ya que el beneficio bruto obtenido no es susceptible de mejora (todos los coeficientes de la función $z_j - c_j$ son positivos).

El programa óptimo viene, pues, constituído por:

5,1143 hectáreas de rotación R_1,

C-5

3.250 P_6	12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}	R
0,0079	0	1	−0,2465	0	−0,7521	0,0082	−0,0077	−1,07
0,0234	0	0	0,1093	0	−0,1044	−0,2297	−0,0217	1,21 →
1,5441	0	0	−0,6731	1	−0,0139	−13,2056	−1,4309	−41,67
0,1792	0	0	−0,1039	0	0,1402	−1,4784	−0,1660	191,33
0,4022	0	0	0,0428	0	0,0205	1,9106	−0,2885	35,87
0	1	0	0	0	0	0	1	∞
3.696	0	0	229	0	941	10.848	7.379	

C-6

3.250 P_6	12.714 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	0 P_{13}
0,0320	0	1	−0,1337	0	−0,8599	−0,2289	−0,0300
0,0379	0	0	0,1771	0	−0,1692	−0,3722	−0,0351
1,5845	0	0	−0,4840	1	−0,1945	−13,6029	−1,4684
0,1782	0	0	−0,1087	0	0,1447	−1,4684	−0,1650
0,3926	0	0	−0,0020	0	0,0633	2,0048	−0,2796
0	1	0	0	0	0	0	1
3.786	0	0	651	0	538	9.962	7.296

1,2071 hectáreas de rotación R_3,
8,7692 vacas lecheras,
100 gallinas,

con un beneficio bruto de 183.088 pesetas.

El programa definitivo —recordemos la inclusión de 1,20 hectáreas de cebada para la alimentación del ganado de labor—, consistirá, pues, en:

2,1876 hectáreas de trigo,
1,20 hectáreas de cebada,
0,2414 hectáreas de maíz,
1,9462 hectáreas de remolacha,
1,9462 hectáreas de alfalfa,
8,7692 vacas lecheras,
100 gallinas.

El beneficio bruto total obtenido —teniendo en cuenta también el debido a la cebada, ya que ésta se valoró a precios de mercado en el coste de la alimentación del ganado de labor— resulta ser de 191.355 pesetas.

Sin afectar sensiblemente los resultados obtenidos, podríamos redondear ligeramente las cifras y considerar como programa óptimo, en las condiciones señaladas, el siguiente:

2,20 hectáreas de trigo,
1,20 hectáreas de cebada,
0,25 hectáreas de maíz,
2 hectáreas de remolacha,
2 hectáreas de alfalfa,
9 vacas lecheras,
100 gallinas,

que representa el óptimo plan de producción en una explotación que cuenta con 2 U. T. H. disponibles todo el año en la zona de La Violada.

Inmediatamente se obtiene el tamaño óptimo de la explotación en tales condiciones. Este resulta ser de 7,65 hectáreas. El valor de la producción final correspondiente a este programa óptimo es de 415.402 pesetas, correspondiente a una productividad media de 54.300 pesetas/hectárea y 207.700 pesetas/U. T. H., o 692 pesetas/jornada de trabajo.

Tal vez sorprenda al lector el resultado obtenido, es decir, el hecho de que el programa óptimo que venimos de calcular dé menor beneficio (191.355 pesetas) que el obtenido por el primer programa (225.017 pesetas), en el que se tenía la limitación suplementaria de la superficie total = 10 hectáreas.

La razón principal de esta, a primera vista, sorprendente diferencia en los resultados proviene del supuesto que hemos considerado en el último programa calculado, es decir, la utilización única de la alfalfa para la alimentación del ganado, sin posibilidades de comercializarla. La producción de alfalfa para su venta y exportación es una actividad muy rentable, cuando es posible, que, naturalmente, influye en la composición del programa óptimo (más superficie de alfalfa en el primer programa y menos vacas).

¿Qué conclusión podría sacarse de ello? La de que si la exportación de alfalfa de las explotaciones es posible en las condiciones de precios supuestas en el primer programa que hemos calculado, el sistema de producción de las explotaciones de la zona debe comportar mayor superficie de alfalfa que la que resulta del programa lineal que acabamos de calcular, y, naturalmente, el tamaño óptimo podrá pasar de 10 hectáreas. Pero si tenemos en cuenta que, en general, si todas las explotaciones de la zona producen tal cantidad de alfalfa como resulta del primer programa, habrá, ciertamente, dificultades de encajar tal producción en el mercado y, desde luego, el precio de venta de la misma deberá disminuir considerablemente, nuestra hipótesis de no comercialización de la alfalfa es válida para la explotación media representativa de la zona.

El programa óptimo calculado comporta la plena utilización de los factores limitantes, a excepción de 1,45 jornadas de trabajo que quedan sin emplear en primavera y 45,76 jornadas sin emplear en otoño, es decir, un 8 por 100 del total disponible. Su utilización en trabajos de interior, reparaciones, etc., no presenta ningún problema.

Siempre, en el supuesto de la bondad de los datos utilizados, el programa obtenido parece satisfactorio. Muestra, entre otras cosas, la gran rentabilidad del ganado vacuno en las explotaciones de la zona, resultado al que se ha llegado también por diversos caminos (12). La dimensión óptima obtenida: 7,65 hectáreas, con

(12) Véase a este respecto:
"Estudio económico de un grupo de explotaciones agrícolas de la zona de La Vio-

las debidas reservas a los datos utilizados y a las pocas alternativas que en cuanto a actividades productivas se han considerado, parece indicar que algunas críticas que se han formulado relativas al reducido tamaño de tales explotaciones son totalmente infundadas.

Es decir, puede deducirse de los resultados hasta ahora obtenidos que las superficies medias de las explotaciones de La Violada pueden utilizar plenamente 2 U. T. H., es decir, el trabajo suministrado por dos personas adultas durante todo el año, con una rentabilidad satisfactoria. Todo esto, en el supuesto de que los datos que hemos utilizado sean correctos. Mas, sobre esto, permítasenos abrigar algunas dudas.

6. Consideraciones sobre los datos utilizados. Correcciones a introducir.

Los principales datos que hemos venido utilizando hasta ahora se refieren a los beneficios unitarios, a su vez función del valor de la producción y de los costes directos, y a las exigencias de trabajo de las distintas especulaciones.

En lo que se refiere al valor de la producción, ésta, a su vez, depende de los rendimientos físicos y de los precios de venta. Nos ocuparemos únicamente aquí de los rendimientos físicos. He aquí los que hemos utilizado hasta ahora:

Trigo	28 Qm/Ha.
Cebada	29 Qm/Ha.
Maíz	40 Qm/Ha.
Remolacha	32 Tm/Ha.
Alfalfa	65 Tm/Ha.
Vacas	4.380 litros/vaca.
Cerda	14 lechones.
Gallinas	255 huevos/ave.

A la vista de los resultados reales obtenidos en las explotaciones de la zona y, sobre todo, los obtenidos en las explotaciones más rentables, hemos modificado nuestros datos para hacerlos algo más realistas. Quedan así los nuevos rendimientos:

---

lada", por Enrique Botella y Fúster, Revista de Estudios Agro-Sociales, núm. 42, enero-marzo 1963.

"Funciones de producción en agricultura", por Emilio Gómez Manzanares, Revista de Estudios Agro-Sociales, núm. 48, julio-septiembre 1964.

Trigo	25 Qm/Ha.
Cebada	30 Qm/Ha.
Maíz	35 Qm/Ha.
Remolacha	30 Tm/Ha.
Alfalfa	40 Tm/Ha.
Vacas	4.380 litros/vaca.
Cerda	14 lechones.
Gallinas	200 huevos/ave.

Obsérvese que los cambios mayores afectan los rendimientos de alfalfa y de las aves, que consideramos eran excesivos en relación a las posibilidades de la zona.

Una modificación mucho más importante se impone en lo que se refiere a las necesidades de trabajo. Las cifras de que nos hemos servido están basadas en formas primitivas de utilización del trabajo (excepto en lo que se refiere al trigo y a la cebada, en que los rendimientos del trabajo eran excelentes), con un grado ínfimo de mecanización de las operaciones culturales y una deficiente organización del trabajo (en especial, en lo que se refiere al ganado).

Hemos pensado cuál sería la organización óptima de la producción en estas explotaciones si éstas estuvieran provistas de adecuados medios mecánicos y si el trabajo en la explotación estuviera organizado en forma más racional. Hemos tomado como referencia las cifras relativas a exigencias de trabajo en las distintas especulaciones consideradas que se utilizan corrientemente en el Reino Unido (13) en trabajos de programación de explotaciones, a las cuales hemos añadido, en las especulaciones vegetales, las necesidades adicionales de trabajo impuestas por el riego.

Naturalmente que estas modificaciones significan la supresión del ganado de labor y ligeros cambios en los gastos directos (disminución, por una parte, en lo que se refiere a gastos del ganado de trabajo y aumento en carburantes y otros gastos de utilización de la maquinaria y tractor). Los nuevos datos sobre valor de la producción, gastos directos y beneficios unitarios quedan, pues, de la siguiente forma:

---

(13) Las cifras han sido extraídas de la publicación *Farm Management Handbook*, University of Bristol, Department of Economics, Reino Unido, 1963.

ESPECULACIONES	Valor de la producción	Gastos directos	Beneficio unitario
Trigo	15.000	7.121	7.879
Cebada	13.500	6.161	7.339
Maíz	15.750	8.969	6.781
Remolacha	36.900	14.860	22.040
Alfalfa	17.600	11.898	5.702
Vacas	26.214	13.143	13.071
Cerdos	9.000	5.750	3.250
Gallinas	44.000	42.406	1.594

Los nuevos datos de exigencias de trabajo son:

ESPECULACIONES	Necesidades de trabajo (Jornadas/unidad)			
	Primavera	Verano	Otoño	Invierno
Trigo	1,50	1,50	2,00	0,25
Cebada	1,50	1,50	2,00	0,25
Maíz	2,00	10,00	5,00	0,50
Remolacha	17,50	10,80	0,35	22,00
Alfalfa	3,60	10,40	2,25	—
Vacas	3,00	3,00	3,00	3,00
Cerdos	2,00	2,00	2,00	2,00
Gallinas	7,50	7,50	7,50	7,50

7. Nueva determinación del tamaño óptimo de las explotaciones de la zona de La Violada.

Utilizando los nuevos datos que proponemos, vamos a determinar cuál sería el programa óptimo de producción en las condiciones existentes en la zona (rendimientos físicos a esperar, precios corrientes, etc.) y directamente obtendremos al tiempo la superficie óptima buscada.

Consideramos siete actividades posibles: rotaciones R_1, R_2, R_3 R_4, definidas como en el programa anterior, y vacas, cerdos y aves, como actividades animales.

Obsérvese que hemos prescindido de la cebada, pues ya no es necesaria dada la ausencia de ganado de labor en las explotaciones que vamos a programar, y, por otra parte, resulta algo menos rentable que el trigo en todos los casos y juega el mismo

CUADRO NÚM. 3

Disposición de los datos para la nueva determinación del tamaño óptimo de las explotaciones de la zona de La Violada.

RESTRICCIONES			ACTIVIDADES									
				Especulaciones vegetales				Especulaciones animales				
Grupos	Números	Definiciones	Variables representativas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Disponibilidades	Unidades
			Definiciones	R_1 (tra)	R_2 (tmra)	R_3 (ttmra)	R_4 (tmraa)	Vacas	Cerdos	Aves		
			Unidades	1 Ha.	1 Ha.	1 Ha.	1 Ha.	1 A.	1 A.	100 A.		
			Beneficios unitarios	6.007	6.200	6.536	2.581	13.071	3.250	1.594		
Restricciones impuestas por las disponibilidades en mano de obra.	1.	Trabajo disponible en primavera.		7,53	6,15	5,22	5,64	3,00	2,00	7,50	≦ 150	1 j.
	2.	Trabajo disponible en verano ...		7,57	8,17	6,84	8,62	3,00	2,00	7,50	≦ 150	1 j.
	3.	Trabajo disponible en otoño		1,53	2,40	2,32	2,37	3,00	2,00	7,50	≦ 150	1 j.
	4.	Trabajo disponible en invierno..		7,42	5,69	4,60	4,55	3,00	2,00	7,50	≦ 150	1 j.
Restricciones de orden alimenticio.	5.	Superficie mínima de alfalfa....		−0,33	−0,25	−0,20	−0,40	0,365	0,036	0	0	1 Ha.

papel que éste en la rotación. Es por eso que las disponibilidades de trabajo en cada época del año son las mismas: 150 jornadas.

Con los nuevos rendimientos que hemos estimado para la alfalfa, algo menores que los que hemos considerado en anteriores programas, la superficie mínima de este cultivo necesaria para alimentar una vaca lechera durante todo el año es ahora de 0,365 hectáreas, y la superficie mínima necesaria para alimentar una cabeza de ganado de cerda es de 0,036 hectáreas.

Calculadas las cifras relativas a beneficios unitarios y exigencias de trabajo de las rotaciones, a partir de los mismos datos relativos a las especulaciones individuales, podemos ya disponer los datos en la forma acostumbrada (ver cuadro núm. 3).

De este cuadro se obtiene inmediatamente la solución de base

D-1

	$c_j \rightarrow$ ↓	Solución	P_0	6.007 P_1	6.200 P_2	6.536 P_3	2.581 P_4	↓ 13.071 P_5
	0	P_8	150	7,53	6,15	5,22	5,64	3,00
	0	P_9	150	7,57	8,17	6,84	8,62	3,00
	0	P_{10}	150	1,53	2,40	2,32	2,37	3,00
	0	P_{11}	150	7,42	5,69	4,60	4,55	3,00
←	0	P_{12}	0	−0,33	−0,25	−0,20	−0,40	**0,365**
		$z_j - c_j$	0	−6.007	−6.200	−6.536	−2.581	−13.071 ↑

D-2

	$c_j \rightarrow$ ↓	Solución	P_0	↓ 6.007 P_1	6.200 P_2	6.536 P_3	2.581 P_4	13.071 P_5
	0	P_8	150	10,2423	8,2047	6,8637	8,9274	0
←	0	P_9	150	**10,2823**	10,2247	8,4837	11,9074	0
	0	P_{10}	150	4,2423	4,4547	3,9637	5,6574	0
	0	P_{11}	150	10,1323	7,7447	6,2437	7,8374	0
	13.071	P_5	0	−0,9041	−0,6849	−0,5479	−1,0958	1
		$z_j - c_j$	0	−17.824 ↑	−15.152	−13.698	−16.904	0

(D-1), que indica inmediatamente la conveniencia de introducir la actividad P_5 (vacas lecheras) en el programa. Fácilmente, siguiendo siempre el procedimiento indicado, se llega al cuadro D-2, en el cual, naturalmente, la actividad P_5 (vacas) aparece en la solución al nivel cero, ya que no pueden introducirse las vacas en el programa sin que entre al tiempo la alfalfa. Esta se introducirá en el nuevo programa; en efecto, la actividad P_1 (rotación R_1: trigo-remolacha-alfalfa) debe reemplazar a P_9 (no utilización del trabajo disponible en verano) en el nuevo cuadro (D-3), que constituye ya el programa óptimo, ya que, en las condiciones expuestas, no hay posibilidad de aumentar el beneficio bruto por encima de la cifra de 260.025 pesetas que da este programa.

El programa óptimo obtenido comporta:

D-1

3.250 P_6	1.594 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	R	
2,00	7,50	1	0	0	0	0	50	
2,00	7,50	0	1	0	0	0	50	
2,00	7,50	0	0	1	0	0	50	
2,00	7,50	0	0	0	1	0	50	
0,036	0	0	0	0	0	1	0	→
−3.250	−1.594	0	0	0	0	0		

D-2

3.250 P_6	1.594 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}	R	
1,7042	7,50	1	0	0	0	−8,2191	14,64	
1,7042	7,50	0	1	0	0	−8,2191	14,59	→
1,7042	7,50	0	0	1	0	−8,2191	35,36	
1,7042	7,50	0	0	0	1	−8,2191	14,80	
0,0986	0	0	0	0	0	2,7397	−0	
−1.961	−1.594	0	0	0	0	35.811		

D-3

$c_j \rightarrow$ $\downarrow$	Solución	P_0	6.007 P_1	6.200 P_2	6.536 P_3	2.581 P_4
0	P_8	0,5843	0	−1,9792	−1,5862	−2,9332
6.007	P_1	14,5881	1	0,9943	0,8250	1,1580
0	P_{10}	88,1129	0	0,2366	0,4638	0,7448
0	P_{11}	2,1890	0	−2,3298	−2,1154	−3,8958
13.071	P_5	13,1891	0	0,2140	0,1980	−0,0488
	$z_j - c_j$	260.025	0	2.570	1.008	3.737

14,5881 hectáreas de la rotación R_1 (trigo-remolacha-alfalfa),
13,1891 vacas lecheras,

es decir, redondeando ligeramente las cifras:

5 hectáreas de trigo,
5 hectáreas de remolacha,
5 hectáreas de alfalfa,
13 vacas lecheras.

El beneficio bruto obtenido supera al obtenido en los programas anteriores.

La producción final en este programa es de 588.982 pesetas, correspondiente a unas 40.000 pesetas/hectárea y a cerca de 300.000 pesetas/U. T. H., o sea 1.000 pesetas/jornada. Como era de esperar, la productividad del trabajo ha aumentado considerablemente; la productividad por hectárea es algo menor que en el caso anterior, consecuencia evidente de haber considerado rendimientos físicos inferiores y, desde luego, más realistas.

El programa óptimo significa el pleno empleo del trabajo en verano, verdadero factor limitante, quedando prácticamente utilizadas las disponibilidades de trabajo en primavera e invierno, y sobrando 88 jornadas de trabajo disponibles en otoño. Es decir, un 15 por 100 del trabajo disponible queda sin emplear en los trabajos de campo o en el cuidado del ganado. Su utilización en trabajos necesarios de interior (pintura, reparaciones, etc.) no presenta problemas.

D-3

13.071 P_5	3.250 P_6	1.594 P_7	0 P_8	0 P_9	0 P_{10}	0 P_{11}	0 P_{12}
0	0,0070	0,0293	1	−57,4019	0	0	−0,0324
0	0,1657	0,7294	0	5,6044	0	0	−0,7993
0	1,0012	4,4057	0	−23,7755	1	0	−4,8282
0	0,0253	−5,6863	0	−56,7855	0	1	−0,1204
1	0,2484	0,6594	0	5,0669	0	0	2,0170
0	992	11.406	0	99.895	0	0	21.563

Consideramos que el tamaño óptimo de las explotaciones agrícolas de la zona de La Violada no deberá andar muy lejos de la cifra obtenida de 15 hectáreas. No se piense que las cifras que hemos utilizado como exigencias de trabajo de las distintas especulaciones son demasiado optimistas. No son sino cifras medias obtenidas en la región sudoeste del Reino Unido, perfectamente obtenibles en La Violada con una mejor organización del trabajo. Recuérdese que las exigencias particulares de riego de los distintos cultivos han sido tenidas en cuenta, y es ésa la razón principal por la que dos trabajadores adultos no pueden atender más que 15 hectáreas, aun en el supuesto de una relativamente eficiente organización del trabajo.

Naturalmente que esta mejor organización del trabajo lleva consigo mayores inversiones en maquinaria, lo que representa un aumento en el coste de los factores que hemos llamado comunes. Sin embargo, este aumento no tiene por qué resultar astronómico, ya que las explotaciones de la región están en inmejorables condiciones para la utilización en común de tal maquinaria. Por otra parte, la supresión del ganado de labor representa también algunas economías. Todo lo cual nos induce a pensar que las 15 hectáreas de regadío en la zona en cuestión representan la mejor solución para emplear económicamente el trabajo de una familia media de agricultores y obtener, a la vez, un nivel bastante satisfactorio de producción por hectárea; objetivos ambos de carácter económico y social.

8. Conclusiones.

El propósito principal que nos hemos fijado en este trabajo ha sido el de exponer en forma sencilla cómo algunas técnicas de programación —en especial la programación lineal— pueden aplicarse con éxito a las explotaciones agrícolas. Hemos visto cómo los supuestos en que esta técnica se basa: linearidad, divisibilidad y aditividad, pueden, con alguna hábil manipulación, adaptarse a las condiciones particulares de la producción de una explotación agrícola, sin riesgo sensible de error.

Por otra parte, la programación lineal presenta la enorme ventaja de considerar siempre el conjunto de la explotación como un todo único, sin la deformación profesional de otras técnicas, tales como la organización del trabajo, el análisis de las posibilidades agronómicas de la explotación, la conservación del suelo, etc., que miran a la explotación desde un ángulo particular y, desde luego, incompleto.

Su flexibilidad, además, es asombrosa, pudiéndose adaptar a una serie de objetivos distintos condicionados por múltiples consideraciones de índole diversa. Sus aplicaciones al nivel microeconómico, en la empresa agrícola, son numerosas: programas óptimos de producción, tamaño óptimo de explotaciones, raciones de coste mínimo para alimentar el ganado, comparación de niveles de mecanización, etc.

Veamos, a título de ejemplo, cómo debe estudiarse la conveniencia de adquirir una determinada máquina en la explotación, una cosechadora, por ejemplo. Para ello calcularíamos el programa óptimo de producción en la explotación en cuestión, supuesta la no existencia de tal máquina, teniendo en cuenta las restricciones impuestas por las circunstancias en que se encuentra la explotación (superficie, mano de obra, etc.). Después calcularíamos otro programa óptimo, para cuya determinación se habría tenido en cuenta la existencia de la máquina en cuestión, con efectos inmediatos sobre los gastos directos y las exigencias de trabajo de las actividades «cereales». Pues bien, la diferencia entre el beneficio bruto así obtenido y el correspondiente al programa anterior, sin la máquina, deberá compararse con el aumento de gastos comunes que la existencia de la máquina ocasiona en la explotación. Si la diferencia de beneficios es superior a este incremento de gastos comunes anuales, entonces convendrá —por puras razones económicas— adquirir la máquina; si no, no deberá adquirirse, a no ser que existan razones de otra índole. Obsérvese la superioridad de este método sobre el tradicional de comparar el coste de producción con y sin máquina, y tomar la decisión que comporte el menor coste. En efecto, este último procedimiento ignora los costes de oportunidad, que juegan un papel tan importante en la producción agrícola de la explotación.

Antes de concluir quisiéramos llamar la atención sobre la necesidad de disponer de datos fidedignos sobre rendimientos, precios, gastos directos, exigencias de mano de obra, etc., relativos a todas las especulaciones que se consideren. La programación lineal constituye una técnica sumamente precisa, pero, por lo mismo, muy sensible a los datos utilizados. No es preciso resaltar el hecho de que toda programación vale lo que valen los datos empleados.

Un inconveniente, de otro orden, para la aplicación de programas lineales en una situación concreta es el gran número de cálculos necesarios por iteración, multiplicados, a su vez, por el número de iteraciones. En efecto, cuando el programa comporta un gran número de actividades y de restricciones, que es el caso más frecuente cuando se buscan resultados a aplicar en una situación real, los cálculos a realizar resultan prohibitivamente largos y entonces es preciso recurrir al empleo de ordenadores electrónicos, capaces de manejar un gran número de actividades y ecuaciones restrictivas (el ordenador IBM tipo 650, por ejemplo, es capaz de manejar un número de actividades multiplicado por el número de restricciones igual a 4.000) en un tiempo relativamente corto. El empleo de la programación lineal en muchos casos está, pues, condicionado a las facilidades existentes en cuanto a computadores electrónicos.

BIBLIOGRAFIA

A) ARTICULOS

Los artículos sobre aplicaciones de la programación lineal que han venido apareciendo en las revistas especializadas en los últimos quince años son ya innumerables. Aun dentro de las aplicaciones agrícolas, es raro no encontrar en cada número de las revistas de economía agraria que mencionamos a continuación al menos un estudio de aplicación de la programación lineal a un problema agrícola. He aquí las revistas más importantes en este sentido:

— *Journal of Farm Economics*, Menasha, Wisconsin, U. S. A.
— *Canadian Journal of Agricultural Economics*, Ottawa, Ontario, Canadá.
— *Journal of Agricultural Economics*, Reading, England.
— *Indian Journal of Agricultural Economics*, Bombay, India.
— *Australian Journal of Agricultural Economics*, Camberra, Australia.

B) LIBROS SELECCIONADOS

Los libros publicados sobre programación en general, y sus aplicaciones agrícolas en particular, son también muy numerosos. Citamos a continuación algunos de los más importantes, dentro de los que hemos consultado.

ALLEN (R. G. D.): *Mathematical economics*. London. Mac Millan & Co. Ltd. 1957.

CHURCHMAN (C. W.), ACKOFF (R. L.), ARNOFF (E. L.): *Introduction to Operations Research*. John Wiley and Sons, Inc. New York. 1958.

DORFMAN (R.), SAMUELSON (P. A.), SOLOW (R. M.): *Linear Programming and Economic Analysis*. Mc Graw Hill Book Company, Inc. New York. 1958.

ESTACIO (F. B. de): *Técnicas de Programaçao linear*. Fundaçao Calouste Gulbenkian. Centro de Estudos de Economia Agraria. Lisboa. 1961.

GASS (S. I.): *Linear Programming methods and applications*. Mc Graw Hill Book Company, Inc. New York. 1958.

HEADY (E. O.) and CANDLER (W.): *Linear Programming methods*. The Iowa State College Press. Ames. 1958.

JOHNSSON (H.), RENBORG (U.), SAFVESTAD (V.): *Recherche du revenu le plus élevé en agriculture*. Centre National de Comptabilité et d'Economie Rurale. París. 1959.

O. C. D. E.: *Le Programme Planning. Méthode simple de détermination de systèmes de production rentables pour l'exploitation agricole*. Serie «Documentation dans l'Agriculture et l'Alimentation», núm. 45. París. 1961.

VAJDA (S.): *The theory of games and Linear Programming*. Methuen & Co. Ltd. London. 1958.

VILLERS (A.): *Application des programmes lineaires à la gestion des exploitations agricoles*. Centre de Recherches d'Economie Rurale Heverlee (Louvain). 1962.

RESUMEN

Comienza el autor exponiendo en forma sencilla la evolución y las principales técnicas de programación agrícola al nivel de las explotaciones, haciendo especial hincapié en la programación lineal. Con algún detalle se estudian los fundamentos teóricos en que se basa esta técnica, se muestran algunas de sus aplicaciones en la planificación agrícola y se indican cuáles son sus principales limitaciones en este sentido.

En la segunda parte del estudio se realiza una aplicación concreta de programación lineal a las explotaciones de regadío de la zona de La Violada. Se resuelve con detalle un primer programa lineal para una explotación familiar de 10 hectáreas de regadío en la zona y se interpretan los resultados. Seguidamente se analizan las variaciones que introduce en la solución óptima un aumento de las disponibilidades de trabajo, sin que se modifiquen los demás factores. Finalmente se determina, mediante la programación lineal, la dimensión óptima de las explotaciones familiares de regadío en la zona, bajo diversos supuestos relativos a los rendimientos medios a esperar de cada especulación y a las exigencias de trabajo de las mismas.

RÉSUMÉ

L'auteur commence par exposer de façon simple l'évolution et les principales techniques de programmation agricole au niveau des exploitations, en insistant particulièrement sur la planification linéaire. On étudie en détail les bases théoriques sur lesquelles repose cette technique. On montre quelques-unes de ses applications dans la planification agricole et on indique quelles sont ses principales limites dans ce sens.

Dans la seconde partie de l'étude, en réalise une application concrète de planification linéaire aux exploitations de terres irriguées de la zone de La Violada. On résout en détail un premier programme linéaire pour une exploitation familiale de 10 hectares de terres irriguées dans cette zone et on interprète les résultats. On analyse ensuite les variations qu'introduit dans la meilleure solution une augmentation des disponibilités de travail sans que les autres facteurs soient modifiés. Enfin, on détermine par la programmation linéaire quelles sont les meilleures dimensions des exploitations familiales de terres irriguées dans la zone, à divers points de vue relatifs aux rendements moyens à attendre de chaque exploitation et aux exigences de travail de celles-ci.

SUMMARY

The author begins with a simple explanation of the evolution and principal techniques of agricultural programme planning on the level of the actual workings, giving special emphasis to lineal planning. The theoretical foundations on wich this technique is based are examined in some detail, some of its applications in agricultural planning are shown and its chief limitations in this sense are indicated.

In the second part of the study a concrete application of lineal planning is made to the irrigations work in the zone of La Violada. A first lineal programme is worked out in detail for a family working of 10 hectares of irrigation in the zone, and the results are interpreted. Then the author analyses the variations introduced into the ideal solution by an increase in the labour available, without the other factors being altered. Finally he determines, by means of lineal planning, the ideal dimensions for family irrigation workings in the zone, on various hyptheses with regard to the average yields to be expected from each venture and to the labour demanded by these.