FUNCIONES DE PRODUCCION EN LA AGRICULTURA

Por

EMILIO GOMEZ MANZANARES

Doctor Ingeniero Agrónomo

INTRODUCCION

Este trabajo se compone de dos partes. Una primera parte está dedicada a una rápida revisión de la teoría de la producción agrícola en lo que se refiere, principalmente, a funciones de producción y análisis marginal. La segunda parte se propone aplicar algunos de los principios enumerados en la primera parte de este trabajo a una pequeña región agrícola.

I. TEORIA DE LA PRODUCCION AGRICOLA

1. Generalidades.

La producción agrícola es el resultado de la acción progresiva o simultánea de diversos factores: la semilla sobre el suelo, las labores de cultivo, los abonos, el trabajo de la recolección, etc. Tradicionalmente, estos factores de la producción han venido clasificándose en tres categorías principales: la tierra, el capital y el trabajo. Un cuarto factor, la organización, suele considerarse actualmente como un factor más de la producción, independientemente del trabajo, término que se aplica casi únicamente al trabajo físico. No es éste lugar de iniciar una discusión filosófica sobre qué se entiende por tierra —éste es el término más discutido de los tres—, capital y trabajo. Baste precisar que el concepto de tierra comprende no sólo el suelo agrícola, sino también las construcciones y alojamientos de la explotación, asi como las características climatológicas, tales como frecuencia y volumen de precipitaciones, temperatura, horas de sol, vientos dominantes, etc. A efectos contables suele denominársele capital territorial, para distinguirlo del resto del capital, o capital de ejercicio. Este último se compone de capital de explotación y de capital circulante (1).

Es indudable que, en general, una mayor o menor dosificación en el empleo de los distintos factores de la producción afecta al volumen y a la calidad de ésta. El empleo de mayor cantidad de trabajo, por ejemplo, en operaciones culturales suplementarias, pueden incrementar la producción de un determinado producto de la explotación. Igual puede decirse de un aumento del capital circulante, mayor empleo de abonos, por ejemplo. Ahora bien, si consideramos la producción de una explotación agrícola, la producción agrícola de una región, etc., en un tiempo determinado, un año, por ejemplo, lo que nos interesa asociar a ella no es el capital o trabajo disponible, sino el realmente utilizado o empleado durante ese período de tiempo. Es decir, que puede decirse que la producción en cuestión es consecuencia directa del empleo de cantidades determinadas de los distintos factores de la producción, en términos de tantas hectáreas de suelo en cultivo, tantas horas de trabajo empleadas, tantos kilogramos de fertilizantes aplicados por hectárea, etc.

Pues bien, la producción de la explotación tiene un valor que es función de las cantidades y de los precios de venta de cada producto. Existe, por otra parte, un coste que es a su vez función de las cantidades y clase de cada factor de producción gastado en el año y de los precios de adquisición de estos factores. Desde el punto de vista del empresario, considerado como una persona con intereses puramente económicos, el objetivo perseguido es el de hacer máxima la diferencia [valor de la producción] — [total de gastos], siempre que se tomen en consideración los objetivos a largo plazo (conservación de la fertilidad del suelo, de los capitales, etc.). El objetivo que persigue un agricultor, jefe de explotación, no coincide siempre con el expuesto anteriormente. Tal vez esté interesado en practicar determinados cultivos o cuidar

(1) Para una definición y desarrollo de estos conceptos véase el artículo "La práctica del balance de una empresa agrícola", por Enrique Botella y Fuster, REVISTA DE ESTUDIOS AGRO-SOCIALES, núm. 39, abril-junio 1962.

determinadas clases de ganado, independientemente de su rentabilidad relativa; tal vez pretenda ocupar plenamente la mano de obra familiar de que dispone, o bien, quizá, esté interesado en no trabajar demasiado y vivir cómodamente el resto de sus días. En efecto, el sistema de valores específico de cada individuo determina un objetivo que, naturalmente, difiere de unos casos a otros. En lo que sigue, por simplicidad del razonamiento, vamos a considerar lo que pudiéramos llamar la actitud «racional» desde el punto de vista económico, es decir, aquella que persigue el máximo de beneficios materiales. El coste que representa para el individuo el seguir otra postura, de acuerdo con sus verdaderos intereses, podrá siempre evaluarse en términos de la diferencia entre los beneficios que obtendría siguiendo la actitud «racional» y los que obtiene realmente.

2. Funciones factor/producto.

El caso más sencillo a considerar consiste en variar las dosis de empleo de un factor variable, dejando constante el empleo de los demás, y examinar entonces los efectos que tales variaciones tienen sobre el volumen de la producción. Por ejemplo, ¿qué influencia tienen sobre una hectárea sembrada de trigo sucesivas aportaciones de abonos nitrogenados en dosis de 50 kilogramos cada una? Obsérvese que en un caso como éste no es sólo la cantidad de abonos lo que varía, sino también el trabajo de distribuirlos por el terreno, etc. En realidad, no es posible, en general, aumentar o disminuir el empleo de un factor de la producción sin afectar, siquiera sea ligeramente, a los demás. Pero nada nos impide considerar como un todo global cada aportación de abonos juntamente con el trabajo que representa su distribución en el terreno. De nuevo, para simplificar el problema, prescindimos del trabajo extra que representa la aportación de una dosis mayor de abonado. Realizando experiencias de abonado sobre una serie de parcelas a las que se aplicasen diferentes dosis de abonos nitrogenados, por ejemplo, manteniendo constantes todos los demás factores, labores de cultivo, cantidad de semilla, riegos, etc., obtendríamos una serie de producciones correspondientes en cada caso a una determinada aportación del abono en cuestión. Si representamos gráficamente estos resultados tomando como abscisas las dosis de abonado y como ordenadas las producciones obtenidas, se obtendrán una serie de puntos en el plano a los cuales se podrá ajustar una curva bien en forma rudimentaria, a mano, o por procedimientos estadísticos, como más adelante veremos. En un caso o en el otro la curva obtenida se asemejará a la representada en la figura 1. Esta curva corresponde al caso más general en el que

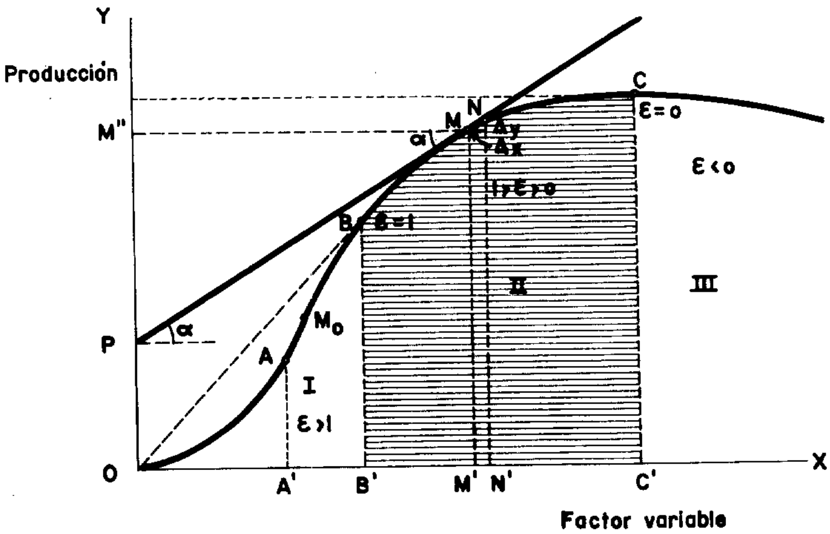

Figura 1

con una aportación nula del factor variable considerado se obtiene una producción nula, con dosis sucesivas de factor variable (aplicadas siempre a los demás factores en cantidad constante: tierra, trabajo, resto del capital, etc.) se obtienen producciones cada vez mayores, aumentando éstas al principio en forma más que proporcional (concavidad hacia las *Y* positivas) y después en forma menos que proporcional (concavidad hacia las *Y* negativas o convexidad). Si se continúan las aportaciones sucesivas y crecientes del factor variable sobre el conjunto de factores fijos considerado, llegará un momento en el que la producción alcanza su valor máximo, para en seguida decrecer con sucesivas aportaciones. En el ejemplo expuesto, relativo al abonado, es harto posible que la curva obtenida no parta de *O* como en la figura 1, sino de un punto más o menos próximo a A o a B. La explicación es sencilla: aunque no proporcionemos un solo gramo de nitrógeno necesario a la planta en forma de abono, ésta encuentra en el suelo una cierta cantidad de este elemento que le permite desarrollarse en cierto modo. En todo caso, cualquiera que sea el factor variable a considerar (tierra, trabajo, semillas, abonos, insecticidas, etc.), siempre nos encontraremos con una curva del tipo de la señalada en la figura 1, o al menos con una parte de ella.

En realidad, no se trata sino de la constatación de una ley de la naturaleza conocida desde antiguo con distintos nombres: ley de las proporciones variables, ley de rendimientos marginales decrecientes, etc. Tal vez el nombre más apropiado sea el de ley de la productividad marginal decreciente, como a continuación veremos.

Convendrá, primeramente, familiarizarse con algunos términos que es necesario emplear más adelante. La curva en cuestión corresponde a una sencilla «función de producción» en la que figura un solo factor (el abono, por ejemplo) y un solo producto (el trigo, por ejemplo). El cociente de dividir la producción obtenida por la cantidad de factor variable empleado se llama «productividad media» del factor en cuestión. En la figura 1 la productividad media del factor variable en el punto M es el cociente MM'/OM', o, de otra forma, el coeficiente angular de la recta OM, que une el punto M al origen de coordenadas. Se observará que la productividad media es diferente según el punto de la curva que se considere. Si dividimos el incremento de producción obtenido con una dosis suplementaria de factor variable por esta cantidad suplementaria de factor, obtenemos el llamado «producto marginal medio» en un punto o intervalo determinado, por ejemplo: $\Delta y/\Delta x$ en el intervalo MN, siendo $\Delta y = NN' - MM'$ y $\Delta x = ON' - OM'$. Si hacemos el incremento de factor variable infinitamente pequeño obtendremos el correspondiente aumento infinitesimal de producción, y el nuevo cociente obtenido dividiendo Δy por Δx, que, en suma, no es sino

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

se llama «productividad marginal» del factor x considerado, en el punto M. Como puede verse, esta productividad marginal corresponde al coeficiente angular de la tangente a la curva en el punto M.

Otro concepto interesante es el de «elasticidad» de la producción con respecto al factor variable x considerado. Corresponde, en términos simples, al porcentaje de aumento de producción que tiene lugar al incrementar en un 1 por 100 la dosis de factor variable. La elasticidad media en el intervalo MN sería

$$e_m = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

siendo x e y las coordenadas de M, de N o bien de un punto intermedio. En términos más precisos, la elasticidad en un punto M (x, y) viene dada por la fórmula

$$\varepsilon = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}$$

Es fácil ver que

$$\varepsilon = \frac{dy}{y} : \frac{dx}{x} = \frac{dy}{dx} : \frac{y}{x}$$

es decir, que la elasticidad en un punto es igual al cociente que resulta de dividir la productividad marginal entre la productividad media en el punto.

La productividad media, que es nula en el origen O, va aumentando de valor hasta alcanzar su valor máximo en B (recuérdese que es igual al coeficiente angular de la recta que une el punto en cuestión con el origen O), en que la recta OB es tangente a la curva; después va disminuyendo de valor.

La productividad marginal (o coeficiente angular de la tangente a la curva en cada punto) va aumentando de valor en la primera fase de la curva, hasta alcanzar su valor máximo en A, en que tiene lugar un cambio de curvatura (punto de inflexión, derivada segunda nula, derivada primera o productividad marginal máxima). A partir de A la productividad marginal es decreciente, se anula en C (correspondiendo a la máxima producción, y, por tanto, derivada primera nula) y se hace negativa a partir de C, coincidiendo con una producción decreciente. En el punto B

la productividad marginal y la productividad media tienen el mismo valor, ya que *OB* es tangente a la curva en *B*.

La elasticidad es mayor que la unidad hasta el punto *B*, ya que el coeficiente angular de la tangente es siempre mayor que el de la secante que une el punto en cuestión con el origen; es decir, la productividad marginal es mayor que la productividad media. En *B* la elasticidad es igual a la unidad; de *B* a *C* la elasticidad es inferior a la unidad, aunque positiva (ya que la productividad marginal es siempre inferior a la productividad media, aunque ambas son positivas). En *C* la elasticidad se anula, a la vez que la productividad marginal, y a partir de *C* se hace negativa.

Es evidente que no interesa detener la producción en ningún punto antes de llegar a *A*, pues si interesa producir algo del producto (en este caso estamos), interesará producir más allá de *A*, ya que siempre a una misma aportación adicional de factor variable corresponde una cantidad suplementaria mayor de producción (productividad marginal creciente); es decir, el beneficio bruto (diferencia entre el valor de la producción y el coste del factor variable) aumenta. A partir de *A* pueden entrar dudas, pero, de nuevo, sin consideramos que la elasticidad (% de aumento de la producción cuando se incrementa en un 1 por 100 la dosis de factor variable) es superior a la unidad hasta el punto *B*, es fácil demostrar que el beneficio bruto sigue aumentando. En efecto, si $y_0 \, p_y - x_0 \, p_x = b_0$ representa el beneficio bruto (b_0), siendo p_y, p_x los precios del producto y del factor, respectivamente, en un punto M_0, al incrementar x_0 en 1 por 100 tendremos que el nuevo beneficio bruto es:

$$b_1 = \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) y_0 \, p_y - 1{,}01 \, x_0 \, p_x = (y_0 \, p_y - x_0 \, p_x) +$$

$$+ \left(\frac{\varepsilon}{100} \, y_0 \, p_y - 0{,}01 \, x_0 \, p_x\right) = b_0 + 0{,}01 \, (\varepsilon \, y_0 \, p_y - x_0 \, p_x)$$

y como $\varepsilon > 1$, queda

$$b_1 > b_0 + 0{,}01 \, b_0 = 1{,}01 \, b_0 \qquad \text{c. q. d.}$$

Hemos visto, pues, que interesa producir una cantidad de producto superior a *BB'*, o, lo que es lo mismo, conviene emplear más que la cantidad *OB'* de factor variable.

Por otra parte, no conviene producir nunca a partir de *C*, donde se obtiene la máxima producción, ya que a un costo creciente de factor empleado corresponde una cantidad menor de producto y, por consiguiente, un valor decreciente de la producción.

Queda, por tanto, la zona II, rayada en la figura 1, como única «área racional de decisiones», que llaman los autores anglosajones. El punto *M*, correspondiente al volumen óptimo de producción, se encontrará en esta zona, pero para determinarle no basta conocer la función física de producción, representada por la curva de la figura 1; es preciso disponer de otros datos económicos, cuales el precio del producto y el precio de coste del factor variable.

En efecto, la producción convendrá aumentarla siempre que el valor de la producción suplementaria sea superior al coste adicional del factor variable empleado, puesto que de este modo vamos añadiendo al beneficio bruto la diferencia $p_y \Delta y - p_x \Delta x$, que es positiva. Sin embargo, en la zona II en que nos movemos, Δy para un mismo Δx va disminuyendo de valor; es decir, el minuendo de la diferencia considerada va disminuyendo, mientras el sustraendo se mantiene constante. Llegará un momento en el que $p_y\ \Delta y - p_x\ \Delta x = 0$, o sea $p_y\ \Delta y = p_x\ \Delta x$. En ese momento, en el punto *M* en que esto ocurre, convendrá detenerse, ya que de seguir aumentando la dosis de x, el coste $p_x \Delta x$ de una dosis suplementaria resulta superior al valor del producto adicional $p_y\ \Delta y$ y perderíamos dinero de continuar. Es decir, que el empleo óptimo de factor variable —o el volumen óptimo de la producción— corresponde al punto *M*, en el que $p_y \Delta y = p_x \Delta x$. De aquí

$$\Delta y \,/\, \Delta x = p_x \,/\, p_y$$

o en el límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{p_x}{p_y}$$

El óptimo económico de producción y utilización del factor variable viene, pues, determinado por el punto en que la productividad marginal resulta igual a la relación de precios del factor y del producto.

Es fácil probarlo también analíticamente. Sea $y = f(x)$ la función de producción. Si llamamos π al beneficio bruto:

$$\pi = p_y\, y - p_x\, x$$

para hacer π máximo anularemos su derivada primera:

$$\frac{d\pi}{dx} = p_y \frac{dy}{dx} - p_x = 0$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p_x}{p_y} \qquad \text{c. q. d.}$$

Se trata de un máximo y no de un mínimo, ya que

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = p_y \frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

pues en la zona II la productividad marginal es decreciente, y, por lo tanto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

Para determinar el óptimo empleo del factor variable es preciso conocer, por una parte, la función física de producción y, por otra parte, la relación de precios del factor y del producto. Obsérvese que no es necesario conocer los precios de ambos, sino sólo su cociente.

Se deduce de lo anterior que, en general, no convendrá nunca aspirar a obtener la producción máxima, ya que ésta resulta antieconómica, a no ser que $p_x / p_y = 0$, lo que sólo ocurrirá cuando $p_x = 0$, es decir, el factor resulte gratis (caso del aire, por ejemplo, en la producción ganadera), o cuando $p_y = \infty$, es decir, cuando el producto tenga un valor incalculable.

Tanto más convendrá acercarse a la producción máxima cuanto más barato sea el factor y más caro —relativamente— sea el producto. Lo contrario ocurrirá cuando el factor sea relativamente caro y el producto relativamente barato.

¿Cómo determinar en un caso concreto el volumen óptimo de producción o la cantidad óptima de factor variable a emplear?

Supongamos conocida la relación p_x / p_y, y la función de producción $y = f(x)$, obtenida aplicando métodos estadísticos a unos experimentos agronómicos (más adelante haremos una aplicación concreta).

Gráficamente, bastará con trazar el haz de rectas con coeficiente angular $c = p_x/p_y$, familia de rectas paralelas, y determinar de entre todas ellas aquella que resulte tangente a la curva representada. El punto de tangencia nos da automáticamente las dos coordenadas (x, y) que buscamos.

Analíticamente, bastará con resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{p_x}{p_y} \end{aligned}\right\} \text{ y despejar } x \text{ e } y.$$

Es fácil obtener una medida gráfica del beneficio bruto máximo; basta prolongar la tangente en M hasta cortar al eje de ordenadas en P. Se tendrá:

$$OP = OM'' - M''P = y - MM'' \operatorname{tg} \alpha = y - x \cdot \frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{p_y} (y\,p_y - x\,p_x)$$

Es decir, que OP nos da la medida del beneficio bruto máximo a determinada escala (ya que $1/p_y$ es una constante).

Hasta ahora no hemos considerado más que un caso elemental, excesivamente simplificado, con objeto de exponer en forma clara y sencilla la teoría. Sin embargo, aun un ejemplo tan simple como el considerado —caso de un solo producto y un solo factor variable— nos ha permitido sacar algunas conclusiones de gran interés, cuales son:

a) En rarísimas ocasiones convendrá llegar a la producción máxima por hectárea, por animal, etc., contrariamente a una opinión bastante generalizada en el medio agrícola y, lo que es aún más lamentable, en círculos técnicos.

b) Las recomendaciones sobre utilización de un determinado factor variable: abonado por hectárea, alimentos concentrados por cabeza de ganado, agua de riego por hectárea, número de escardas por cultivo, etc., son equivocadas si no están basadas en consideraciones sobre el valor del producto en cuestión y el coste del factor variable, a la vez que las relaciones físicas *input/output* que constituyen la función física de producción. Desgraciadamente, muchos consejos que se dan a los agricultores a este respecto son basados en consideraciones puramente técnicas, con un olvido completo de su significación económica.

c) El menor cambio en la relación (p_x/p_y) de precios del factor y del producto obliga a modificar la recomendación dada sobre el empleo óptimo del factor variable en cuestión. De aquí lo absurdo de mantener viejas recetas de abonado, de prácticas de cultivo, de alimentación del ganado, etc., cuando las condiciones económicas de la producción han cambiado.

d) Cambios no sólo tienen lugar en la relación de precios. También las funciones físicas de producción varían en el transcurso del tiempo. Por ejemplo, una nueva variedad de planta cultivada obtenida por selección genética puede responder mejor a las aportaciones de abonado, o una variedad de una determinada raza ganadera puede transformar en forma más eficiente los alimentos que se le suministran. Naturalmente que, cuando es éste el caso, las recomendaciones que eran oportunas para otras variedades de plantas o de animales no son ya las más apropiadas para la nueva variedad.

En relación con la forma que adopta la función de producción en los distintos casos que puedan presentarse, es interesante hacer una distinción entre lo que se entiende por «capacidad» y «eficiencia» de una unidad técnica (hectárea de determinado tipo de suelo, vaca de determinadas características, etc.). La capacidad se refiere a la posibilidad física de una unidad técnica de absorber una cantidad determinada de factor variable sin llegar a que se anule la productividad marginal. La eficiencia se relaciona con el beneficio bruto (valor de la producción menos coste del factor variable utilizado) obtenido por unidad técnica. Estos dos términos no son necesariamente idénticos. Una vaca lechera de gran tamaño puede ser capaz de consumir grandes cantidades de piensos (con una productividad marginal positiva), mientras una vaca de tamaño reducido tal vez proporcione un beneficio bruto superior.

Tales características vienen reflejadas por la forma de la función de producción o curva de relaciones *input/output*. En la figura 2 hemos representado las funciones de producción E y C, correspondientes a dos unidades técnicas diferentes (las dos vacas lecheras en cuestión, por ejemplo). La curva C corresponde a una unidad técnica con mayor capacidad (posibilidad de absorber una cantidad OS' de factor variable sin que se anule la productividad marginal) que la de la unidad técnica representada en E (que no puede absorber más que OR' de factor variable en las mismas condiciones de productividad marginal positiva). Sin embargo, en determinadas condiciones de precios del producto (leche, por

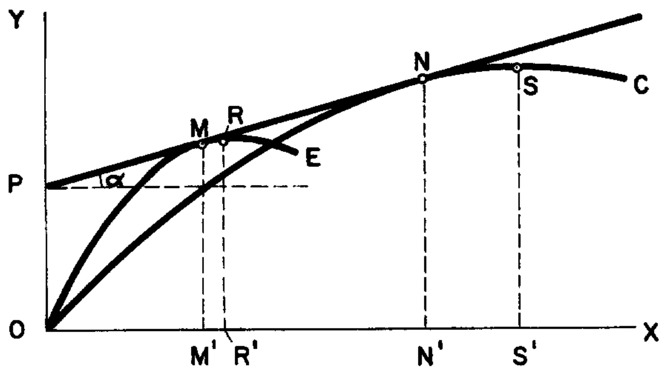

Figura 2

ejemplo) y del factor variable (piensos), la unidad técnica, cuya función de producción viene representada gráficamente por la curva *E*, resulta ser más eficiente. Es fácil ver cuándo *E* es más eficiente que *C*, es decir, cuándo el beneficio bruto obtenido con la unidad técnica correspondiente a *E* (la vaca pequeña) es superior al que se obtendría con *C* (la vaca grande). Bastará trazar una tangente común a ambas curvas.

Sea ésta la recta *PMN*. Hemos visto que *OP* nos da una medida del beneficio bruto a la escala $1/p_y$. Si la relación de precios (p_x/p_y) es igual al coeficiente angular de la recta *PMN* (es decir, tg α), entonces ambas unidades técnicas dan el mismo beneficio bruto $(1/p_y \times OP)$. Cuando la relación $p_x/p_y > \text{tg}\,\alpha$, entonces *E* resulta más eficiente que *C*; cuando $p_x/p_y < \text{tg}\,\alpha$, entonces *C* es más eficiente que *E*.

3. Caso de dos factores.

Consideremos ahora una función de producción que relacione las cantidades de un producto determinado conseguidas con sucesivas aportaciones de dos factores variables aplicados sobre un conjunto de factores fijos. Por ejemplo, la producción de trigo de una hectárea determinada de terreno como función del capital empleado y del trabajo. La función de producción será de la forma

$$y = f(x_1, x_2)$$

Las condiciones óptimas de producción se darán cuando el beneficio bruto sea máximo; es decir,

$$\pi = p_y\, y - p_1\, x_1 - p_2\, x_2 = \text{máx.}$$

para lo cual bastará anular la diferencial de π:

$$d\pi = p_y\, dy - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 = 0$$

es decir,

$$p_y\, dy = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2$$

como, por otra parte, diferenciando

$$y = f(x_1, x_2)$$

se tiene:

$$\left.\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dx_2 \\ p_y\, dy &= p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 \end{aligned}\right\} \text{ sistema de ecuaciones de que resulta:}$$

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{p_2} = \frac{1}{p_y} \quad \text{o, de otra forma:} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{p_1}{p_y} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{p_2}{p_y} \end{aligned}\right.$$

De la solución de este sistema de tres ecuaciones [las dos igualdades de arriba más la función $y = f(x_1, x_2)$] con tres incógnitas, saldrán los valores de x_1, x_2 e y, que constituyen la solución óptima. Es decir, se obtienen así, simultáneamente, el volumen de producción óptima y la óptima combinación de los dos factores variables.

Convendrá a estas alturas familiarizarse con algunos conceptos y términos de empleo frecuente en esta rama de la economía de la producción.

Consideremos la familia de curvas $f(x_1, x_2) = k$, en las que k puede tomar los valores y_0, y_1, y_2, y_3, ... correspondientes a diversos niveles de producción.

Cada una de estas curvas, representadas en la figura 3, recibe el nombre de «isocuanta» o «curva de isoproducto» y representa las distintas combinaciones posibles de los factores x_1 y x_2 que son necesarias para la obtención de un nivel determinado de pro-

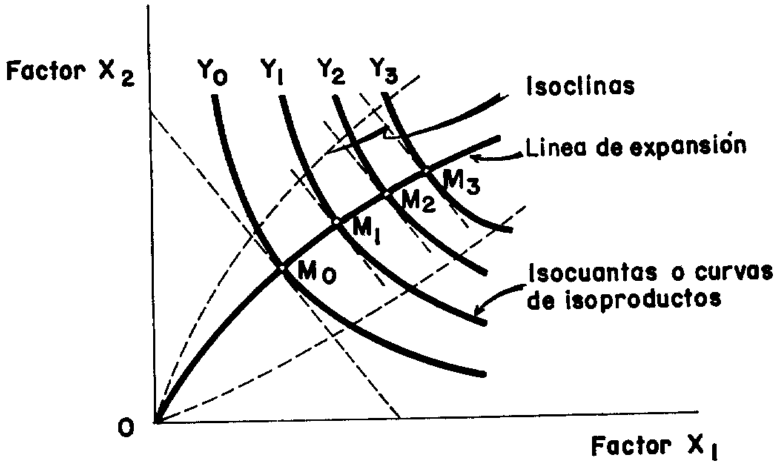

Figura 3

ducción. Vemos, pues, que una cantidad determinada de producto —nuestro objetivo por el momento— puede obtenerse de muy diferentes maneras según que se emplee más o menos de x_1 y de x_2. ¿Cuál de estas maneras diferentes de obtener una cantidad determinada de producto es la más conveniente? Sin duda alguna, la que represente el coste mínimo. Para ello, el saber la forma de la isocuanta en cuestión no basta; es preciso conocer también el precio de coste de los factores x_1 y x_2. Sean éstos p_1 y p_2, respectivamente. Se tendrá como función de coste

$$c = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

que deberá hacerse mínima, para lo cual

$$dc = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = 0$$

de donde

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{p_1}{p_2}$$

El cociente $\dfrac{dx_2}{dx_1}$ recibe el nombre de «tasa marginal de sustitución», y la condición de coste de producción mínimo implica que la tasa marginal de sustitución sea igual a la relación inversa de los precios de x_1 y de x_2 (sin preocuparse del signo negativo, ya que la tasa marginal de sustitución es, por definición, negativa).

Pero $\dfrac{dx_2}{dx_1}$ es el coeficiente angular de la tangente a la isocuanta en cuestión en el punto (x_1, x_2), de donde surge en seguida un procedimiento gráfico de determinar este punto. Bastará trazar el haz de rectas de coeficiente angular $= - p_1/p_2$ y escoger la que resulte tangente a la isocuanta considerada. Si hacemos lo mismo para cada isocuanta obtendremos una curva al unir todos los puntos $M_0, M_1, M_2, M_3, \ldots$, de tangencia. Esta es la llamada «línea de expansión», que no es sino el lugar geométrico de los puntos de producción a coste mínimo. En realidad, la línea de expansión es una «isoclina» particular correspondiente a la producción a coste mínimo. Isoclinas son las curvas que unen puntos de las isocuantas con la misma tasa marginal de sustitución, es decir, con tangentes paralelas.

La ecuación de la línea de expansión es fácil de hallar. En efecto, diferenciando $f(x_1, x_2) = k$ se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

y, por otra parte, antes vimos que

$$p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 = 0$$

de donde

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{p_2}$$

ecuación en x_1, x_2 que corresponde a la línea de expansión. Si en lugar de p_1 y p_2 ponemos otros valores, a y b, por ejemplo, tales que $\dfrac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$, obtendremos la ecuación de una isoclina correspondiente a las tangentes de coeficiente angular $-\dfrac{a}{b}$, o sea de ángulo α con el eje de las x_1.

Del examen de la teoría, tal como la hemos expuesto breve-mente, surgen inmediatamente importantes conclusiones de gran valor práctico. Así, por ejemplo, el error de recomendar una fórmula rígida de alimentación del ganado a base de una cantidad fija de piensos concentrados y otra de forraje, sin tener en cuenta la sustituibilidad de los mismos y los precios relativos. Otro error sería el de determinar el grado deseable de mecanización de una explotación sin tener en cuenta las relaciones de sustitución maquinaria/trabajo y los precios relativos de ambos factores. Los ejemplos son innumerables; dejamos al lector la tarea de buscar por sí mismo numerosas aplicaciones de la teoría a situaciones concretas de su conocimiento.

4. Caso de varios factores.

Hemos considerado anteriormente el caso de un solo producto y dos factores variables. Un caso más general es el de un solo producto y varios factores variables. Sean éstos $x_1, x_2, \ldots\ x_n$.

La función de producción:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

El beneficio bruto será:

$$\pi = y\, p_y - (x_1\, p_1 + x_2\, p_2 + \ldots + x_n\, p_n)$$

y será máximo cuando $d\pi = 0$, es decir:

$$p_y\, dy = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots + p_n\, dx_n$$

y diferenciando $y = f(x_1, x_2, \ldots\ x_n)$:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

La compatibilidad de ambas ecuaciones exige que

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{p_2} = \ldots = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}}{p_n} = \frac{1}{p_y}$$

es decir, para un valor cualquiera de $i\,(1, 2, \ldots\ n)$ se tendrá:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{p_i}{p_y}$$

Es decir, el beneficio máximo se obtiene cuando la productividad marginal de cada factor variable es igual a la relación del precio del factor dividido por el precio del producto. Expresado de otra forma, cuando el coste marginal de cada factor iguala al producto marginal obtenido.

5. Caso de dos productos.

Supongamos una serie de factores fijos y un solo factor variable, o un conjunto de factores que varían simultáneamente y en bloque (a los efectos se comportan como un solo factor variable).

Sean y_1 e y_2 las cantidades de dos productos diferentes (1 y 2) que pueden obtenerse utilizando cantidades x_1 y x_2 del factor variable considerado aplicadas sobre el conjunto de factores fijos. Sean

$$y_1 = f_1(x_1)$$
$$y_2 = f_2(x_2)$$

las funciones de producción correspondientes, y sea

$$x_1 + x_2 = X$$

la cantidad total de factor variable a utilizar. Eliminando x_1 y x_2 de las tres ecuaciones consideradas queda la función

$$F(y_1, y_2, X) = 0$$

que liga los dos productos en cuestión y la cantidad total de factor variable empleada.

Para cada valor de X tendremos una función que relaciona únicamente los dos productos 1 y 2, función llamada «de transformación», expresión analítica de la relación producto/producto.

En la figura 4 hemos representado gráficamente tres funciones de transformación correspondientes a las cantidades X_0, X_1 y X_2 de factor variable utilizadas en la producción de cantidades y_1 e y_2 de los productos 1 y 2, respectivamente. Las curvas dibujadas reciben varios nombres: curvas de isofactor, curvas de isorecurso, curvas de isocoste, curvas de transformación, curvas de oportunidad, curvas de posibilidades de producción. En lo que sigue emplearemos el término de «curvas de oportunidad» para designarlas.

Un punto cualquiera M en la curva de oportunidad X_0 significa

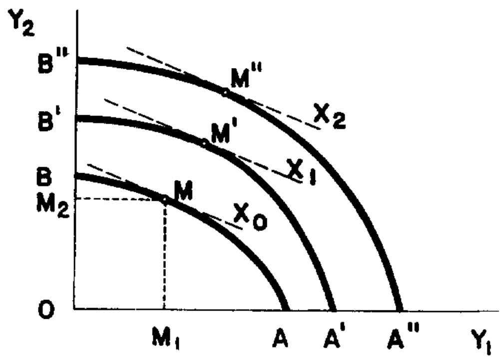

Figura 4

la producción de OM_2 unidades de producto 2 y de OM_1 unidades de producto 1 con un empleo total de factor variable igual a X_0.

Para una cantidad fija de factor variable, X_k, ¿cuál es el grado óptimo de empleo? O, de otra manera, ¿qué cantidad de cada producto convendrá producir? Convendrá, sin duda, emplear la cantidad X_k de factor variable repartida entre la producción de 1 y 2, de tal manera que se obtenga el valor máximo de producción. Esto equivale a hacer

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 = \text{máx.}$$

siendo p_1 y p_2 los precios del producto 1 y 2, respectivamente.

Bastará con anular la diferencial:

$$p_1 \, dy_1 + p_2 \, dy_2 = 0$$

o sea:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = - \frac{p_1}{p_2}$$

que indica que el óptimo económico de empleo del factor variable, o la combinación productiva más económica, tiene lugar cuando la «tasa marginal de sustitución» iguala en valor absoluto a la relación inversa de los precios de ambos productos.

Como la «tasa marginal de sustitución» en un punto M es el coeficiente angular de la tangente a la curva de oportunidad en ese punto, resulta elemental determinar gráficamente el punto correspondiente al óptimo económico.

Es fácil determinar las cantidades x_1 y x_2 de factor variable a emplear en la producción de 1 y 2, respectivamente.

En efecto:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{f'_2(x_2)\,dx_2}{f'_1(x_1)\,dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}$$

pero

$$x_1 + x_2 = X_k = \text{constante},$$

luego

$$dx_1 + dx_2 = 0$$

y entonces

$$\frac{f'_2(x_2)}{f'_1(x_1)} = \frac{p_1}{p_2}$$

que con $x_1 + x_2 = X_k$ constituye un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (x_1 y x_2), fácil de resolver.

Según sean las funciones de producción correspondientes a y_1 e y_2, resultará una función de transformación diferente. Un caso muy sencillo, por ejemplo, es cuando las funciones de producción son lineales:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_1 x_1 + c_1 \\ y_2 &= b_2 x_2 + c_2 \\ x_1 + x_2 &= X \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1 - c_1}{b_1} \\ x_2 &= \frac{y_2 - c_2}{b_2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{y_1 - c_1}{b_1} + \frac{y_2 - c_2}{b_2} = X$$

que es también una función de transformación lineal.

Las principales relaciones existentes entre dos productos (productos competitivos, complementarios y suplementarios) vienen reflejadas en la forma que adopta la curva de oportunidad.

Se dice que dos productos son «competitivos» (o concurrentes) en la utilización de determinados recursos cuando la producción de uno de ellos sólo puede incrementarse a costa de un sacrificio en la producción del otro. Son competitivos, en general, todos aquellos productos que juegan el mismo papel en la rotación de cultivos (por ejemplo, el trigo y la cebada), o bien los que constituyen variedades distintas de una misma planta o raza animal. Estos ejemplos pertenecen todos al caso de productos competitivos con tasa constante de sustitución. La curva de oportunidad correspondiente a la función de transformación es una línea recta.

Se da también el caso de productos competitivos con tasa creciente de sustitución cuando los recursos constantes, sucesivos incrementos de producción de 1, implican sacrificios en aumento de 2, y, con menos frecuencia, productos competitivos con tasa decreciente de sustitución. Lo que caracteriza a los productos competitivos es que la tasa marginal de sustitución es siempre negativa:

$$\left(\frac{dy_2}{dy_1} < 0\right)$$

La figura 4 representa tres curvas de oportunidad correspondientes a dos productos competitivos con tasa creciente de sustitución.

Dos productos son técnicamente «complementarios» cuando un aumento en la producción de uno de ellos, con los recursos en cantidad constante, resulta también en un aumento en la producción del otro. De otro modo, una transferencia de recursos de un cultivo a otro cultivo aumenta el rendimiento del primero. Este tipo de relación se da con frecuencia entre productos agrícolas. Es el caso, por ejemplo, de las leguminosas, que contribuyen a aumentar la producción de cereales, debido: *a)* al aumento de la fertilidad del suelo al fijar el nitrógeno atmosférico en sus raíces; *b)* mejora de la estructura del suelo al añadir materia orgánica; *c)* medida preventiva contra la erosión del suelo, y *d)* control de insectos. Lo que caracteriza a los productos complementarios es que la tasa marginal de sustitución es positiva:

$$\left(\frac{dy_2}{dy_1} > 0\right)$$

Dos productos son «suplementarios» cuando, manteniendo los recursos constantes, la producción de uno de ellos puede aumentarse sin que por ello se modifique la producción del otro. Es el caso, por ejemplo, de dos cultivos, uno de otoño y otro de primavera, con respecto a la utilización de la mano de obra de la explotación. Caracteriza a la relación de suplementaridad el que la tasa marginal de sustitución es nula:

$$\left(\frac{dy_2}{dy_1} = 0\right)$$

Para terminar, existen otras dos relaciones posibles de productos: productos conjuntos y productos antagonistas. Los productos «conjuntos» se dan en un mismo proceso productivo, y no puede obtenerse uno de ellos sin que su obtención no venga acompañada del otro o de los otros. Ejemplos: el grano y la paja en los cereales; la lana y la carne de oveja; los cerdos y el estiércol, etc. Dos productos se llaman «antagonistas» cuando las funciones de producción de ambos se modifican al producirse uno de ellos en presencia del otro. Por ejemplo, la producción de polluelos y la producción de pavos en una misma empresa, debido al probable contagio de enfermedades. Los productos antagonistas suelen ser al mismo tiempo competitivos. El grado de antagonismo viene representado en la pendiente de la curva de oportunidad.

6. Caso general.

El caso más general comprende la consideración de varios productos y de varios factores independientes, siendo unos variables y fijos los demás. La expresión analítica de una tal función de producción adopta la forma:

$$F(y_1, y_2, \ldots y_m \;\; ; \;\; x_1, x_2, \ldots x_h \;\; | \;\; x_{h+1}, \ldots x_n) = 0$$

en la que $y_1, y_2, \ldots\ y_m$ son las cantidades producidas de m productos diferentes, $x_1, x_2, \ldots\ x_h$ son las cantidades de h factores variables a emplear, y $x_{h+1},\ x_{h+2},\ \ldots\ x_n$ son las cantidades fijas de los $n - h$ factores restantes.

Una tal función de producción, en la que tanto los productos obtenidos como los factores puestos en juego vienen expresados en términos físicos, presenta, en general, un interés teórico. La dificultad material de obtención de tal función y la no menor dificultad de su manejo y utilización hacen que carezca de gran valor práctico.

En teoría, las condiciones de beneficio máximo pueden obtenerse en forma semejante a como hemos venido procediendo hasta ahora.

En efecto, función a maximizar:

$$\pi = \sum_{1}^{m} p_i\, y_i - \sum_{1}^{h} q_j\, x_j$$

que es el beneficio bruto obtenido (diferencia entre el valor de la producción y los gastos variables).

Bastará con diferenciar π y anular el resultado:

$$d\pi = p_1\, dy_1 + p_2\, dy_2 + \ldots + p_m\, dy_m - q_1\, dx_1 - q_2\, dx_2 - \ldots - q_h\, dx_h = 0$$

pero, por otra parte, diferenciando la función de producción:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} dy_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_m} dy_m + \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \\ + \frac{\partial F}{\partial x_h} dx_h = 0$$

Y para que estas dos últimas ecuaciones constituyan un sistema compatible es preciso que

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y_2}}{p_2} = \ldots = \frac{\frac{\partial F}{\partial y_m}}{p_m} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_1}}{q_1} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_2}}{q_2} = \ldots = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_h}}{q_h}$$

El sistema de ecuaciones constituído por estas $(m + h - 1)$ ecuaciones y la función de producción nos proporciona al resolverlo las $(m + h)$ incógnitas buscadas: las cantidades de los m productos y las dosis a emplear de los h factores variables.

7. Funciones globales de producción.

Hasta ahora hemos venido tratando de funciones de producción en las que tanto los productos considerados como los factores vienen expresados en términos físicos: Qm. de trigo o de remolacha, Kgs. de abonos nitrogenados, m^3 de agua de riego, etc. Tales funciones se denominan «funciones físicas de producción». Si expresamos tanto los productos como los factores en términos monetarios, sin más que multiplicar las cantidades de unos y otros por sus precios respectivos obtendremos las «funciones de valor de la producción». Una solución mixta, conveniente en muchas ocasiones, sería la de referir los productos a su valor de venta y expresar algunos factores en términos físicos (por ejemplo: la tierra, el trabajo) y otros en términos de costo anual (gastos anuales en maquinaria, en el ganado; gastos en semillas, insecticidas, fertilizantes, etc.). De todos estos tipos de funciones haremos abundante uso en la segunda parte de este trabajo.

Funciones de producción del tipo $Y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, en la que Y designa el valor de la producción total o final de una explotación, región agrícola o aun de todo el sector agrícola de un país, son utilísimas para determinar el grado de desequilibrio existente en un momento dado en la utilización de los distintos factores de la producción. Por ejemplo, pueden indicarnos que la mano de obra en una región determinada es relativamente superabundante y el capital escaso, y que una mayor aportación de capital y un menor empleo de mano de obra redundarían en mayores beneficios para los explotantes. Las aplicaciones prácticas que se traducen para la política agraria de un país son numerosísimas. Más adelante, en la segunda parte del trabajo, deduciremos algunas conclusiones de interés para una región agrícola española y mostraremos algunas aplicaciones inmediatas de la utilización de funciones de producción. Nos ocuparemos también de la determinación estadística de las mismas.

Los economistas de la producción se han servido de distintos tipos de ecuaciones para tratar de ajustarlas a los datos empíricos obtenidos como resultados de la investigación agrícola o de encuestas económicas. He aquí algunas de las más comúnmente utilizadas:

— Función de Spillman:

$$Y = A\left(1 - R_1^{x_1}\right)\left(1 - R_2^{x_2}\right)$$

en la que A corresponde al rendimiento máximo que puede obtenerse al aumentar progresivamente la dosis de los factores (abonos) x_1 y x_2; R_1 y R_2 son dos parámetros.

— Función cuadrática:

$$Y = a + b\,x_1 + c\,x_2 + d\,x_3 + e\,x_2^2 + f\,x_1\,x_2 + \ldots$$

— Función en raíces cuadradas:

$$Y = a + b\sqrt{x_1} + c\,x_1 + d\sqrt{x_2} + e\,x_2 + f\sqrt{x_1\,x_2} + \ldots$$

— Función lineal:

$$Y = a + b\,x_1 + c\,x_2 + \ldots$$

— Función de Cobb-Douglas:

$$Y = r\,x_1^{\alpha_1}\,x_2^{\alpha_2}\,x_3^{\alpha_3}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

8. Funciones de Cobb-Douglas.

Son, sin duda alguna, las más utilizadas, sobre todo en estudios de porte macroeconómico, cuando se trata de caracterizar la producción agrícola de una región o de un país. Las otras funciones arriba expuestas tienen más aplicación en casos concretos de estudios de relaciones factor/producto, tales como experimentos de abonado, de alimentación del ganado, etc.

Veamos cuáles son las principales características de las funciones de Cobb-Douglas.

Se trata, ante todo, de funciones de elasticidad constante. Ampliemos el concepto de elasticidad de la producción tratado anteriormente. En una función de producción del tipo $Y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ la elasticidad de la producción correspondiente al factor x_i es igual a

$$\varepsilon_i = \frac{\partial Y}{\partial x_i} : \frac{Y}{x_i}$$

o, lo que es lo mismo, al cociente de dividir la productividad marginal del factor variable en cuestión por su productividad media.

Es fácil comprobar que las elasticidades correspondientes a los distintos factores considerados son constantes en las funciones de Cobb-Douglas:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial Y}{\partial x_i} : \frac{Y}{x_i} = \left(r\, x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \ldots \alpha_i\, x_i^{\alpha_i - 1} \ldots x_n^{\alpha_n}\right) : \frac{Y}{x_i} =$$

$$= \left(\alpha_i \times \frac{Y}{x_i}\right) : \frac{Y}{x_i} = \alpha_i$$

es decir, que las elasticidades con respecto a cada factor son los exponentes correspondientes a cada factor en la ecuación.

Las funciones de Cobb-Douglas son, por otra parte, las únicas con esta propiedad. En efecto; hallemos la ecuación general de las curvas con elasticidad constante:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_1} : \frac{Y}{x_1} = \alpha_1 \quad ; \quad \frac{\partial Y}{\partial x_2} : \frac{Y}{x_2} = \alpha_2 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \frac{\partial Y}{\partial x_n} : \frac{Y}{x_n} = \alpha_n$$

o, de otro modo:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_1} = Y \frac{\alpha_1}{x_1} \quad ; \quad \frac{\partial Y}{\partial x_2} = Y \frac{\alpha_2}{x_2} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \frac{\partial Y}{\partial x_n} = Y \frac{\alpha_n}{x_n}$$

y multiplicando, respectivamente, cada igualdad por dx_1, $dx_2, \ldots dx_n$ y sumando ambos miembros, tendremos:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial Y}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial Y}{\partial x_n} dx_n = Y\left(\frac{\alpha_1 dx_1}{x_1} + \frac{\alpha_2 dx_2}{x_2} + \ldots + \frac{\alpha_n dx_n}{x_n}\right)$$

pero el primer miembro no es sino el desarrollo de dy; luego

$$\frac{dY}{Y} = \frac{\alpha_1 dx_1}{x_1} + \frac{\alpha_2 dx_2}{x_2} + \ldots + \frac{\alpha_n dx_n}{x_n}$$

e integrando:

$$\ln Y = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \ldots + \alpha_n \ln x_n + \text{constante}$$

y tomando antilogaritmos tendremos:

$$Y = r.\ x_1^{\alpha_1}\ x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

siendo

$$r = e^{\text{constante}} \qquad \text{c. q. d.}$$

Se llama elasticidad total de la producción a la suma de las elasticidades parciales. Así, en el caso que nos ocupa,

$$\varepsilon = \sum_{1}^{n} \alpha_i$$

Veamos la importancia que tiene el conocer este valor en las funciones de Cobb-Douglas. En efecto, nos permite juzgar inmediatamente si disponemos de economías de escala, de deseconomías de escala, o bien de rendimientos de escala constantes. Precisemos un poco estos conceptos.

Si en una función de producción, en general, $Y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ incrementamos proporcionalmente todos los factores que intervienen (de un mismo porcentaje), tendremos:

$$Y' = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_n)$$

Si la relación

$$\frac{Y'}{Y} \gtreqless \lambda$$

diremos, según el caso, que existen economías de escala, que los rendimientos de escala son constantes o bien que existen deseconomías de escala. Expresado en otros términos, se trata simple-mente de que al aumentar proporcionalmente todos los *inputs* (dosis utilizadas de los distintos factores), el *output* (valor de la producción) aumenta más que proporcionalmente, en la misma proporción o en menor proporción. Es siempre interesante de saber cuál es la situación en un caso concreto (determinada región en un momento dado), para aconsejar la ampliación o reducción de la escala de operación.

En general, en las funciones homogéneas de producción se da, por definición, la propiedad siguiente:

$$Y = \varphi\,(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

es función homogénea de grado m cuando

$$Y' = \varphi\,(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_n) = \lambda^m\, \varphi\,(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Y según que $m \gtreqless 1$, se tendrán los tres casos de economías de escala, rendimientos de escala constantes o diseconomías de escala.

Es fácil comprobar que las funciones de Cobb-Douglas son funciones homogéneas de grado $\Sigma\alpha_i$ (elasticidad total).

En efecto:

$$Y = r\, x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \quad ; \quad Y' = r\,(\lambda x_1)^{\alpha_1}\,(\lambda x_2)^{\alpha_2} \ldots (\lambda x_n)^{\alpha_n} =$$

$$= r\, x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}\,(\lambda)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} = \lambda^{\Sigma\alpha_i}\; Y \qquad \text{c. q. d.}$$

Por lo tanto, según que $\Sigma\alpha_i \gtreqless 1$, se tendrán cada uno de los casos considerados. La mayoría de los estudios realizados en la agricultura utilizando este tipo de funciones han dado valores de $\Sigma\alpha_i$ muy cercanos a la unidad, unas veces mayor, otras veces menor, sin que pueda generalizarse; es preciso siempre hacer un estudio específico de cada situación concreta.

Otra característica de las funciones de Cobb-Douglas es que las productividades marginales de los distintos factores son decrecientes. En efecto:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i} = r\, x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \ldots \alpha_i\, x_i^{\alpha_i - 1} \ldots x_n^{\alpha_n} = \frac{\alpha_i\, Y}{x_i} > 0$$

y, por otra parte,

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2} = r\, x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \ldots \alpha_i\,(\alpha_i - 1)\, x_i^{\alpha_i - 2} \ldots x_n^{\alpha_n} = \frac{(\alpha_i - 1)\,\alpha_i\, Y}{x_i^2} =$$

$$= (\alpha_i - 1)\,\frac{\alpha_i\, Y}{x_i^2} < 0$$

ya que las elasticidades parciales ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i, \ldots \alpha_n$) son menores que la unidad.

Finalmente, una característica de las funciones de Cobb-Douglas, de gran importancia práctica, ya que las hace de un manejo sencillo, es que son funciones lineales en logaritmos. En efecto, tomando logaritmos

$$\log Y = \log r + \alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2 + \ldots + \alpha_n \log x_n$$

es decir, que haciendo el cambio de variables

$$y' = \log Y \quad ; \quad \alpha_0 = \log r \quad ; \quad x'_1 = \log x_1, \ldots \quad ; \quad x'_n = \log x_n$$

tenemos nuestra ecuación convertida en

$$y' = \alpha_0 + \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \ldots + \alpha_n x'_n$$

simple ecuación lineal, correspondiente a una línea de regresión fácilmente calculable por el método de mínimos cuadrados, por ejemplo.

Independientemente de las ventajas que presentan las funciones de Cobb-Douglas, y es por eso que tan gran uso se hace de ellas en estudios agroeconómicos, el mejor criterio para saber si se ajustan bien o mal a los datos de que se dispone es hallar el grado de bondad del ajuste por algún procedimiento estadístico de validez reconocida, tal como la prueba de χ^2, el coeficiente de correlación múltiple, etc.

II. APLICACION A LAS EXPLOTACIONES AGRICOLAS DE LA ZONA DE LA VIOLADA

1. Generalidades.

En la segunda parte de este trabajo se aborda el problema de la determinación práctica de las funciones de producción y se analizan los resultados obtenidos en un grupo de explotaciones. Con este objeto se han utilizado los datos obtenidos en 37 explotaciones agrícolas de regadío de la zona de La Violada, próxima a los Monegros, explotadas por colonos instalados por el Instituto Nacional de Colonización. Las características de la zona y de las explotaciones escogidas han sido descritas ya repetidas veces, por lo que huelga aquí todo comentario (2). Baste recordar que los datos utilizados se refieren a la campaña agrícola 1959-60.

2. Determinación de las funciones de producción.

Dos procedimientos principales suelen utilizarse para determinar funciones de producción: la experimentación agronómica y ganadera y el análisis de los datos contables de las explotaciones agrícolas. El primer procedimiento, la experimentación, tiene mayor aplicación en el estudio de relaciones factor-producto, como, por ejemplo, influencia del abonado, transformación de piensos y forrajes por el ganado, etc., y de relaciones factor-factor: sustituibilidad de los alimentos para el ganado, etc. El segundo procedimiento, es decir, el análisis de los datos contables de las explotaciones agrícolas, es el normalmente empleado para la determinación de funciones globales de producción.

Se podría, al menos en teoría, determinar la función global de producción correspondiente a una sola explotación agrícola. Bastaría con utilizar los datos contables de la explotación relativos a una larga serie de años, en cuanto a los *inputs* o cantidades de los factores puestos en juego, y *outputs* o producciones obtenidas. A la dificultad, empero, de encontrar datos contables de una explotación que se refieran a una larga serie de años, se añaden las dificultades de eliminar el efecto que introducen las posibles variaciones de precios de los factores y productos en el período considerado.

Por ello, en la práctica, resulta preferible obtener la función global de producción a partir de los datos contables de una serie de explotaciones que sean suficientemente homogéneas, especialmente en lo que a características fijas se refiere: calidad del suelo, precipitaciones, proximidad de mercados, etc. De esta forma, con los datos contables de una sola campaña o los medios de unas pocas campañas es posible obtener una función global de producción que relacione el valor de la producción obtenida con la aportación de los diversos factores en cantidades variables.

Es fácil ver cuáles son las condiciones que facilitan la obtención de una función de producción realmente representativa

---

(2) Véanse a este respecto:
"La transformación del desierto de La Violada", por Emilio Gómez Ayau, Revista de Estudios Agro-Sociales, núm. 20, julio-septiembre 1957.
"Planteamiento y organización de un estudio económico de las explotaciones agrícolas de la zona de La Violada", por Enrique Botella y Fuster y Emilio Gómez Manzanares, Revista de Estudios Agro-Sociales, núm. 40, julio-septiembre 1962.
"Estudio económico de un grupo de explotaciones agrícolas de la zona de La Violada", por Enrique Botella y Fuster, Revista de Estudios-Agro-Sociales, núm. 42, enero-marzo 1963.

de una región agrícola. En efecto, contrariamente a lo que pudiera creerse, lo que interesa es disponer de una amplia gama de variaciones en las cantidades de los factores variables puestos en juego, lo cual sólo se consigue cuando existe suficiente diversidad en las explotaciones de la región. Ahora bien, esta diversidad se refiere solamente a aquellos factores variables que figurarán en la función de producción como variables independientes. Por el contrario, los factores fijos que no figurarán en la misma en forma explícita deberán ser lo más homogéneos posible: calidad del suelo, clima, relieve y topografía, habilidad del explotante, etc.

Exactamente las mismas condiciones se aplican a la obtención de una función de producción que ligue un producto determinado —el trigo— a una serie de factores, abonos nitrogenados, fosfóricos y potásicos, por ejemplo. Si se considera una sola dosis de abonado, a base de las tres clases de abono, se obtendrá un solo punto (en un espacio de cuatro dimensiones). Harán falta muchos puntos diferentes, es decir, ensayos con diversas dosis de empleo de cada uno de los fertilizantes, para poder adaptar a ellos una función con un buen grado de ajuste. Por tanto, diversidad en lo que a los factores variables se refiere. Por otra parte, convendrá disponer las experiencias de manera que las variaciones de los factores fijos (calidad y cantidad de suelo, humedad, laboreo, etc.) sean mínimas en las distintas parcelas donde se realizan las experiencias.

Para determinar funciones de producción aplicables a una región agrícola, la solución ideal es considerar la totalidad del universo a estudiar, es decir, los datos provenientes de todas las explotaciones de la región. Este procedimiento, cuando se trata de una región relativamente extensa con numerosas explotaciones, resulta costoso en términos de dinero y de tiempo o de personal. El coste se reduce notablemente, sin atentar sensiblemente a la precisión, si en lugar de estudiar toda la población o universo en cuestión se estudian sólo los datos relativos a una muestra representativa de explotaciones de la comarca. La representatividad de la muestra presenta otro tipo de problemas relacionado con la manera cómo la muestra ha sido escogida (3).

---

(3) Para una breve descripción de los principales métodos de muestreo utilizados en economía agrícola véase el artículo "Los estudios de investigación en economía agraria", por Emilio Gómez Manzanares, REVISTA DE ESTUDIOS AGRO-SOCIALES, núm. 37, octubre-diciembre 1961.

Una vez determinados los *inputs* que figurarán como variables independientes en la función de producción, unos expresados en unidades físicas (hectáreas, toneladas, jornadas de trabajo, etc.) y los demás expresados en valor, se preparará un cuadro donde figurarán los valores de la producción final agrícola y las cantidades o valores de los factores empleados en cada caso (véanse varios cuadros de este tipo en los Anejos).

Veamos cómo se determina estadísticamente una función de producción. Supongamos que se trata de una función de Cobb-Douglas, pues éstas son las que vamos a utilizar en este trabajo.

La forma general de la función es:

$$Y = r\, X_1^{\alpha_1}\, X_2^{\alpha_2} \ldots X_m^{\alpha_m}$$

en la que Y representa el valor de la producción en cuestión, y las variables $X_1, X_2, \ldots X_m$ son las cantidades a emplear de m factores variables. Vimos en la primera parte que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ son las elasticidades parciales de cada uno de los factores; r es una constante.

Parámetros, pues, a determinar: $r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$.

Tomando logaritmos en la función considerada:

$$\log Y = \log r + \alpha_1 \log X_1 + \alpha_2 \log X_2 + \ldots + \alpha_m \log X_m$$

es decir,

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m$$

siendo

$$\log Y = y \quad ; \quad \log r = \alpha_0 \quad ; \quad \log X_j = x_j \, (j = 1, 2, \ldots m)$$

Hemos convertido, pues, la función original en una simple función lineal de las nuevas variables, que son los logaritmos de las primitivas.

Estadísticamente hablando, se trata ahora de determinar la ecuación de una línea de regresión. El método que proporciona una estimación con verosimilitud máxima es el llamado de mínimos cuadrados. Consiste el método en determinar una función —en este caso, lineal— tal, que la suma de los cuadrados de las «distancias» de los datos a la línea a determinar sea mínima.

Hallando los logaritmos de los valores de la producción y factores a considerar, a que nos referimos anteriormente, se obtendrá un nuevo cuadro que comprenderá n (siendo éste el número de explotaciones o de observaciones) series de valores $(y, x_1, x_2, \ldots x_m)$. La «distancia» cuadrática de un punto cualquiera $(y^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots x_m^{(i)})$ a la línea de regresión es

$$\delta_i^2 = [y^{(i)} - (\alpha_0 + \alpha_1 x_1^{(i)} + \alpha_2 x_2^{(i)} + \ldots + \alpha_m x_m^{(i)})]^2$$

La condición de «mínimos cuadrados» implica que

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y^{(i)} - (\alpha_0 + \alpha_1 x_1^{(i)} + \alpha_2 x_2^{(i)} + \ldots + \alpha_m x_m^{(i)})]^2 = \text{mínimo}$$

La condición de mínimo, a su vez, exige que se anulen las derivadas parciales con respecto a $a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$, es decir:

$$\frac{\partial \Sigma \delta_i^2}{\partial \alpha_0} = 2 \times (-1) \times \sum_{i=1}^{n} [y^{(i)} - (\alpha_0 + \alpha_1 x_1^{(i)} + \alpha_2 x_2^{(i)} + \ldots + \alpha_m x_m^{(i)})] = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma \delta_i^2}{\partial \alpha_1} = 2 \times (-1) \times \sum_{i=1}^{n} x_1^{(i)} [y^{(i)} - (\alpha_0 + \alpha_1 x_1^{(i)} + \alpha_2 x_2^{(i)} + \ldots + \alpha_m x_m^{(i)})] = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma \delta_i^2}{\partial \alpha_2} = 2 \times (-1) \times \sum_{i=1}^{n} x_2^{(i)} [y^{(i)} - (\alpha_0 + \alpha_1 x_1^{(i)} + \alpha_2 x_2^{(i)} + \ldots + \alpha_m x_m^{(i)})] = 0$$

....

$$\frac{\partial \Sigma \delta_i^2}{\partial \alpha_j} = 2 \times (-1) \times \sum_{i=1}^{n} x_j^{(i)} [y^{(i)} - (\alpha_0 + \alpha_1 x_1^{(i)} + \alpha_2 x_2^{(i)} + \ldots + \alpha_m x_m^{(i)})] = 0$$

....

$$\frac{\partial \Sigma \delta_i^2}{\partial \alpha_m} = 2 \times (-1) \times \sum_{i=1}^{n} x_m^{(i)} [y^{(i)} - (\alpha_0 + \alpha_1 x_1^{(i)} + \alpha_2 x_2^{(i)} + \ldots + \alpha_m x_m^{(i)})] = 0$$

de donde fácilmente se obtiene (simplificando el algoritmo):

$$\begin{aligned}
&n\,\alpha_0 + \Sigma x_1\,\alpha_1 + \Sigma x_2\,\alpha_2 + \ldots + \Sigma x_m\,\alpha_m = \Sigma y \\
&\Sigma x_1\,\alpha_0 + \Sigma x_1^2\,\alpha_1 + \Sigma x_1 x_2\,\alpha_2 + \ldots + \Sigma x_1 x_m\,\alpha_m = \Sigma x_1\,y \\
&\Sigma x_2\,\alpha_0 + \Sigma x_1 x_2\,\alpha_1 + \Sigma x_2^2\,\alpha_2 + \ldots + \Sigma x_2 x_m\,\alpha_m = \Sigma x_2\,y \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Sigma x_j\,\alpha_0 + \Sigma x_1 x_j\,\alpha_1 + \Sigma x_2 x_j\,\alpha_2 + \ldots + \Sigma x_j x_m\,\alpha_m = \Sigma x_j\,y \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Sigma x_m\,\alpha_0 + \Sigma x_1 x_m\,\alpha_1 + \Sigma x_2 x_m\,\alpha_2 + \ldots + \Sigma x_m^2\,\alpha_m = \Sigma x_m\,y
\end{aligned}$$

sistema lineal de $(m + 1)$ ecuaciones con $(m + 1)$ incógnitas, del que directamente pueden obtenerse los valores de los parámetros ($a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$) que figuran en la ecuación de la línea de regresión múltiple.

La ecuación de Cobb-Douglas, o función de producción buscada, queda así determinada directamente, sin más que tener en cuenta que $a_0 = \log r$, de donde $r = \text{antilog}\, a_0$.

3. Funciones de producción en términos monetarios.

Una primera función de producción, la más simple que puede concebirse, consiste en relacionar la producción final de la explotación con el total de gastos anuales: $P = f(G_t)$.

El sistema de ecuaciones a resolver resulta ser:

$$\begin{aligned} 37 \quad \alpha_0 + 187{,}2669\, \alpha_1 &= 187{,}3431 \\ 187{,}2669\, \alpha_0 + 948{,}2390\, \alpha_1 &= 948{,}5477 \end{aligned}$$

cuya solución da

$$\alpha_0 = 0{,}7855 \quad ; \quad \alpha_1 = 0{,}8452$$

y la función de producción resultante es:

$$P = 6{,}102\, G_t^{0{,}8452}$$

El coeficiente de correlación que liga $p = \log P$ y $g_t = \log G_t$ resulta igual a $r = 0{,}940$, significativo al nivel de 1 %. El coeficiente de determinación correspondiente $r^2 = 0{,}88$ muestra que un 88 % de las variaciones de la producción final están explicadas por variaciones en el volumen de gastos anuales de producción; el 12 % restante se explica por otros factores no considerados, la habilidad y gestión del empresario fundamentalmente, y diversas causas aleatorias.

La elasticidad global de la producción resulta ser $\varepsilon = 0{,}8452$, menor que la unidad, lo que indica la existencia de diseconomías de escala (un aumento del 1 % en los gastos de producción lleva consigo solamente un incremento del 0,84 % de la producción final).

Calculemos el valor de la productividad marginal de los gastos de explotación, es decir, el valor adicional de la producción final que resultaría de un incremento de una peseta en los gastos anuales:

$$\frac{dP}{dG_t} = 0{,}8452 \times 6{,}102\, G_t^{0{,}8452-1} = 0{,}8452 \frac{P}{G_t}$$

La productividad marginal en la explotación media, es decir, aquella que tiene como gastos anuales de producción 118.895 pesetas, resulta ser 0,84. Es decir, por cada peseta adicional de gastos se obtiene un incremento de producción final de 0,84 pesetas. Este valor hallado indica, pues, la conveniencia de reducir los gastos anuales, ya que el nivel medio de gastos (118.895 pesetas) supone ya que se ha pasado el punto óptimo, es decir, aquel en el que la productividad marginal es igual a la unidad, correspondiente en este caso a un volumen de gastos anuales de 40.000 pesetas, con una producción final de 47.500 pesetas.

Una segunda función de producción, algo más completa, resulta de relacionar la producción final con los gastos de trabajo, por una parte (valoración del trabajo del empresario y familia con arreglo a los jornales corrientemente practicados en la zona, más valor del trabajo asalariado), y con los restantes gastos anuales de producción: $P = f(H, K)$.

El sistema de ecuaciones a resolver en este caso es:

$$\begin{aligned} 37\ \alpha_0 + 173{,}9917\, \alpha_1 + 177{,}4278\, \alpha_2 &= 187{,}3431 \\ 173{,}9917\, \alpha_0 + 818{,}9421\, \alpha_1 + 834{,}5053\, \alpha_2 &= 881{,}1511 \\ 177{,}4278\, \alpha_0 + 834{,}5053\, \alpha_1 + 851{,}5092\, \alpha_2 &= 898{,}9064 \end{aligned}$$

con las soluciones

$$\alpha_0 = 1{,}0661 \qquad \alpha_1 = 0{,}0732 \qquad \alpha_2 = 0{,}7614$$

que dan como resultado la función de producción:

$$P = 11{,}64\, H^{0{,}0736}\, K^{0{,}7614}$$

El coeficiente de correlación múltiple que liga $p = \log P$, $h = \log H$ y $k = \log K$ es igual a $r_{p\cdot hk} = 0{,}698$, significativo al nivel de 1 %. El coeficiente de determinación $r^2_{p\cdot hk} = 0{,}4877$ indica que estos dos factores (valor del trabajo empleado y restantes gastos) son responsables de un 50 %, aproximadamente, de las variaciones en la producción final, siendo el otro 50 % de las variaciones debido a otros factores no tenidos en cuenta: gestión del explotante, factores aleatorios.

La elasticidad global de la producción resulta ser $\varepsilon = 0{,}8350$, menor que la unidad, mostrando de nuevo una situación en la que se dan rendimientos decrecientes de escala. La elasticidad parcial con respecto al trabajo $\alpha_1 = 0{,}0736$ resulta sumamente baja.

Las productividades marginales de los dos factores considerados son:

$$\frac{\partial P}{\partial H} = \alpha_1 \frac{P}{H} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial K} = \alpha_2 \frac{P}{K}$$

Y en el caso de una explotación media, con 53.304 pesetas de gastos anuales de trabajo y 65.591 pesetas de otros gastos, éstas resultan ser de 0,17 para el trabajo y de 1,40 para otros gastos. De aquí se deduce la conveniencia de reducir considerablemente los gastos de trabajo y aumentar los otros gastos anuales.

Una tercera función de producción relaciona la producción final con los gastos de trabajo, los gastos relativos al capital territorial y los demás gastos anuales: $P = f(H, T, C)$.

El sistema de ecuaciones a resolver en este caso es:

$$\begin{array}{l} 37 \qquad \alpha_0 + 173{,}9917\,\alpha_1 + 137{,}4716\,\alpha_2 + 175{,}8633\,\alpha_3 = 187{,}3431 \\ 173{,}9917\,\alpha_0 + 818{,}9421\,\alpha_1 + 646{,}7377\,\alpha_2 + 827{,}1338\,\alpha_3 = 881{,}1511 \\ 137{,}4716\,\alpha_0 + 646{,}7377\,\alpha_1 + 512{,}1244\,\alpha_2 + 653{,}6168\,\alpha_3 = 696{,}2410 \\ 175{,}8683\,\alpha_0 + 827{,}1338\,\alpha_1 + 653{,}6168\,\alpha_2 + 836{,}6873\,\alpha_3 = 891{,}0253 \end{array}$$

con las soluciones

$$\alpha_0 = 1{,}1701 \qquad \alpha_1 = 0{,}1110 \qquad \alpha_2 = 0{,}0066 \qquad \alpha_3 = 0{,}7041$$

y la función de producción resultante:

$$P = 14{,}80\ H^{0{,}1110}\ T^{0{,}0066}\ C^{0{,}7041}$$

El coeficiente de correlación múltiple que liga $p = \log P$, $h = \log H$, $t = \log T$ y $c = \log C$ es igual a $R_{p \cdot htc} = 0{,}698$, significativo al nivel de 1 %. El coeficiente de determinación $R^2_{p \cdot htc} = 0{,}4872$, de interpretación análoga al caso anterior.

La elasticidad global de la producción $\varepsilon = 0{,}8217$ sigue mostrando la existencia de diseconomías de escala; la elasticidad parcial con respecto al trabajo sigue siendo baja, 0,1110, aunque algo mayor que en el caso anterior; la elasticidad parcial con respecto al capital territorial resulta ser enteramente insignificante. Más adelante trataremos de explicar la razón.

Las productividades marginales de los tres factores son:

$$\frac{\partial P}{\partial H} = \alpha_1 \frac{P}{H} \quad \frac{\partial P}{\partial T} = \alpha_2 \frac{P}{T} \quad \frac{\partial P}{\partial C} = \alpha_3 \frac{P}{C}$$

que para la explotación media (53.304 pesetas de gastos de trabajo, 5.736 pesetas de gastos anuales del capital territorial y 59.885 pesetas de otros gastos) resultan ser de 0,25 para el trabajo, 0,14 para el capital territorial y 1,42 para los otros gastos. Se deduce de tales resultados la conveniencia de disminuir los gastos de trabajo y de capital territorial (ya hablaremos de éste) y aumentar el montante de los otros gastos.

Una cuarta función de producción relaciona la producción final con los gastos de trabajo, los del capital territorial, los del capital de explotación y los restantes gastos anuales: $P = f(H, T, E, G)$.

El sistema de ecuaciones a resolver en este caso es:

$$\begin{aligned}
37 \quad \alpha_0 + 173{,}9917\,\alpha_1 + 137{,}4716\,\alpha_2 + 143{,}4832\,\alpha_3 + 173{,}2288\,\alpha_4 &= 187{,}3431\\
173{,}9917\,\alpha_0 + 818{,}9421\,\alpha_1 + 646{,}7377\,\alpha_2 + 674{,}8866\,\alpha_3 + 814{,}7434\,\alpha_4 &= 814{,}7434\\
137{,}4717\,\alpha_0 + 642{,}7377\,\alpha_1 + 512{,}1244\,\alpha_2 + 533{,}4689\,\alpha_3 + 643{,}8115\,\alpha_4 &= 696{,}2410\\
143{,}4832\,\alpha_0 + 674{,}8466\,\alpha_1 + 533{,}4689\,\alpha_2 + 558{,}7163\,\alpha_3 + 672{,}2521\,\alpha_4 &= 727{,}3387\\
173{,}2288\,\alpha_0 + 814{,}7434\,\alpha_1 + 643{,}8115\,\alpha_2 + 672{,}2521\,\alpha_3 + 811{,}9085\,\alpha_4 &= 877{,}6393
\end{aligned}$$

con las soluciones

$$\alpha_0 = 1{,}5145 \qquad \alpha_1 = 0{,}1181 \qquad \alpha_2 = -\,0{,}0273 \qquad \alpha_3 = 0{,}2697 \qquad \alpha_4 = 0{,}4377$$

y la función de producción resulta entonces:

$$P = 32{,}70\ H^{0,1181}\ T^{-0,0273}\ E^{0,2697}\ G^{0,4877}$$

El coeficiente de correlación múltiple que liga $p = \log P$ $h = \log H$, $t = \log T$, $e = \log E$ y $g = \log G$, es igual a $R_{p\cdot hteg} = 0{,}782$, significativo al nivel de 1 %. El coeficiente de determinación $R^2_{p\cdot hteg} = 0{,}6111$ indica que más del 60 % de las variaciones de la producción final son debidas al juego de los cuatro factores considerados.

La elasticidad global de la producción $\varepsilon = 0{,}7982$ menor que la unidad, y, por tanto, de nuevo rendimientos decrecientes de escala (diseconomías de escala).

La elasticidad parcial con respecto al trabajo, 0,12, sensiblemente igual que en el caso anterior; la elasticidad parcial con respecto al capital territorial resulta de nuevo insignificante y aún negativa. Resultado tan absurdo en las circunstancias actuales merece una explicación, que daremos más adelante.

Las productividades marginales de los cuatro factores son:

$$\frac{\partial P}{\partial H} = \alpha_1 \frac{P}{H} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial T} = \alpha_2 \frac{P}{T} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial E} = \alpha_3 \frac{P}{E} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial G} = \alpha_4 \frac{P}{G}$$

que para la explotación media (53.304 pesetas de gastos de trabajo, 5.736 pesetas de gastos anuales del capital territorial, 8.764 pesetas de gastos anuales del capital de explotación y 51.091 de restantes gastos anuales) resultan ser de 0,27 para el trabajo, — 0,59 para el capital territorial (?), 3,82 para el capital de explotación y 1,06 para los restantes gastos.

Aparte el resultado absurdo obtenido con relación al capital territorial, las demás cifras indican que, en términos generales, en las explotaciones agrícolas de la zona hay interés en disminuir considerablemente los gastos de trabajo, aumentar enormemente el capital de explotación (maquinaria y ganado) y mantener aproximadamente el nivel de los otros gastos.

Los resultados sorprendentes obtenidos en relación con los gastos anuales del capital territorial, sobre todo en las condiciones existentes en la zona, con explotaciones de unas 10 hectáreas de superficie media, que, a primera vista, no parece excesivamente grande en relación al trabajo disponible, inducen a dudar de la bondad de los datos utilizados. En efecto, Enrique Botella y Fuster, en el magnífico estudio analítico que ha realizado sobre los resultados de las explotaciones que consideramos, advierte que los datos relativos al capital territorial son dignos de poco crédito, pues tanto la valoración de la tierra como de las mejoras y construcciones ha tenido que realizarse de una manera artificiosa y, desde luego, poco realista (4).

4. FUNCIONES DE PRODUCCIÓN MIXTAS.

Consideramos a continuación otras funciones de producción aplicables a los datos de las explotaciones agrícolas de la zona de La Violada. Hemos visto la dificultad de interpretar correctamente la influencia del capital territorial sobre la producción final, debido a una valoración incorrecta del mismo. Procede, por lo tanto, eliminar la influencia perturbadora de tales datos, carentes de toda confianza. Nada mejor que utilizar en su lugar datos físicos de mucha mayor exactitud, cuales son las superficies de las explotaciones. Utilizaremos, por lo tanto, la superficie agrícola útil de las explotaciones como uno de los factores que deberán figurar en la función de producción.

(4) "Estudio económico de un grupo de explotaciones agrícolas de la zona de La Violada", por Enrique Botella y Fuster, REVISTA DE ESTUDIOS AGRO-SOCIALES, núm. 42, enero-marzo 1963.

Otro factor fácilmente expresable en términos físicos es el trabajo empleado en la explotación. Su inclusión en términos físicos tiene, por otra parte, la ventaja de servir para analizar los resultados que se obtendrían en la explotación según diversas hipótesis de jornales a considerar. Será, por tanto, otro factor a considerar en las nuevas funciones de producción, expresado en número de jornadas realmente empleadas en la campaña en cuestión.

Aprovecharemos, al mismo tiempo, para hacer una ventilación diferente de los distintos gastos a considerar. Resulta cómodo y muy frecuente el clasificar los gastos con arreglo a los capitales a los que se refieren: gastos del capital territorial y gastos del capital de ejercicio (es decir, gastos del capital de explotación y gastos correspondientes al capital circulante). Sin embargo, tales clasificaciones, correctas desde el punto de vista contable, carecen con frecuencia de verdadero significado económico, pues agrupan conceptos de naturaleza muy diferente.

En las funciones de producción que figuran en esta sección hemos designado de la siguiente forma los distintos grupos de factores a considerar:

h = Jornadas de trabajo empleadas en la campaña (jornadas de adulto; las de trabajo femenino o infantil han sido propiamente transformadas en jornadas de adulto mediante el empleo de apropiados coeficientes de transformación).

t = Superficie agrícola útil de la explotación, en hectáreas (comprende regadío y secano, aunque este último representa una parte insignificante del total).

G = Gastos anuales del ganado (mobiliario vivo), que comprende:
- Piensos.
- Atenciones del ganado.
- Amortización del ganado.
- Seguros del ganado.
- Interés del capital mobiliario vivo.

M = Gastos anuales en maquinaria y aperos (mobiliario mecánico), que comprende:
- Carburantes.
- Alquiler de maquinaria.
- Amortización de la maquinaria.
- Gastos de conservación de la maquinaria, reparaciones, etc.
- Seguros de la maquinaria.

— Interés del capital mobiliario mecánico.

E = Gastos anuales del capital de explotación (ganado y maquinaria), que es la suma de los anteriores: $E = G + M$.

C = Otros gastos anuales del capital circulante, que comprenden:

- — Adquisición de materiales y productos (salvo los incluídos en otros grupos, tales como piensos del ganado, carburantes, etc.).
- — Canon de riego.
- — Transportes.
- — Seguros de cosechas.
- — Interés del capital tomado a préstamo.
- — Interés del capital circulante.
- — Seguros del capital circulante.
- — Varios.

Los principales gastos que no figuran en la función de producción son:

- — Los gastos de trabajo (éste lo hemos expresado en términos físicos).
- — Valor de la tierra (ésta también figura expresada en términos físicos), ni, por consiguiente, gastos de amortización, conservación, interés ni seguros del capital territorial.
- — Electricidad (de escasa relación con la producción, ya que se refiere casi exclusivamente a los gastos de iluminación de las viviendas).
- — Remuneración por la gestión de la explotación, que podemos considerar como un residuo a recompensar el trabajo de gestión (difícil de cuantificar, por otra parte).
- — Contribuciones e impuestos (por su escasa relación con el proceso productivo de la explotación).

La primera función a calcular relaciona la producción final de la explotación con la cantidad de trabajo (h), la superficie de la explotación (t), los gastos anuales del capital de explotación (E) y los otros gastos anuales del capital circulante (C). Es decir: $P = f(h, t, E, C)$.

El sistema de ecuaciones a resolver es, en este caso:

$$\begin{aligned}
37\ \alpha_0 + 102{,}3795\,\alpha_1 + 39{,}2422\,\alpha_2 + 158{,}4414\,\alpha_3 + 166{,}4476\,\alpha_4 &= 187{,}3435\\
102{,}3795\,\alpha_0 + 284{,}0179\,\alpha_1 + 108{,}8511\,\alpha_2 + 438{,}4335\,\alpha_3 + 460{,}6981\,\alpha_4 &= 518{,}4904\\
39{,}2422\,\alpha_0 + 108{,}8511\,\alpha_1 + 42{,}4193\,\alpha_2 + 168{,}2172\,\alpha_3 + 176{,}8219\,\alpha_4 &= 198{,}8746\\
158{,}4414\,\alpha_0 + 438{,}4335\,\alpha_1 + 168{,}2172\,\alpha_2 + 680{,}1131\,\alpha_3 + 713{,}2013\,\alpha_4 &= 803{,}0855\\
166{,}4476\,\alpha_0 + 460{,}6981\,\alpha_1 + 176{,}8219\,\alpha_2 + 713{,}2013\,\alpha_3 + 749{,}5852\,\alpha_4 &= 843{,}1286
\end{aligned}$$

del que se obtienen:

$$\alpha_0 = 2{,}0414 \quad \alpha_1 = 0{,}0972 \quad \alpha_2 = 0{,}0339 \quad \alpha_3 = 0{,}4728 \quad \alpha_4 = 0{,}1537$$

y la función de producción resultante es de la forma:

$$P = 110 \; h^{0{,}0972} \; t^{0{,}0339} \; E^{0{,}4728} \; C^{0{,}1537}$$

El coeficiente de correlación múltiple de $p = \log P$ con respecto a $h' = \log h$, $t' = \log t$, $e = \log E$ y $c = \log C$ es $R_{p \cdot h't'ec} = 0{,}7400$, significativo al nivel de 1 %. El coeficiente de determinación $R^2_{p \cdot h't'ec} = 0{,}5476$ muestra que aproximadamente el 55 % de las variaciones de la producción final están explicadas por variaciones en el empleo de los factores considerados.

La elasticidad global de la producción resulta ser $\varepsilon = 0{,}7576$, menor que la unidad, de donde existencia de diseconomías de escala. Las elasticidades parciales son, aproximadamente, 0,10 para el trabajo, 0,03 para la tierra (aún notablemente baja), de 0,47 para los gastos de ganado y maquinaria, y de 0,15 para los demás gastos considerados.

Calculemos las productividades marginales de cada uno de los factores:

$$\frac{\partial P}{\partial h} = \alpha_1 \frac{P}{h} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_2 \frac{P}{t} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial E} = \alpha_3 \frac{P}{E} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial C} = \alpha_4 \frac{P}{C}$$

que para la explotación media (617 jornadas de trabajo, 12,20 hectáreas de superficie agrícola útil, 21.589 pesetas de gastos anuales relativos al ganado y maquinaria, y 33.413 pesetas de restantes gastos anuales considerados) resultan ser:

Productividad marginal del trabajo: 19,56 pesetas por jornada, bastante inferior al jornal medio practicado en la región en la época estudiada.

Productividad marginal de la tierra: 344,97 pesetas por hectárea, cifra que equivaldría, aproximadamente, a la renta a pagar por una hectárea de tierra de un valor de 8.625 pesetas, que dista mucho de ser el valor de una hectárea de regadío en la zona; valor bajísimo, por consiguiente.

Productividad marginal de los gastos anuales de ganado y maquinaria: 2,72 pesetas; es decir, que tales gastos resultan sumamente rentables (una peseta gastada da lugar a un valor adicional de 2,72 pesetas de producción).

Productividad marginal de los restantes gastos anuales considerados: 0,57 pesetas; es decir, que tales gastos no son remuneradores, al menos al nivel de empleo de la explotación media (que emplea 33.413 pesetas al año).

Conclusiones generales que se deducen de estos resultados: conveniencia de un mayor volumen de gastos anuales en el ganado y maquinaria y de un menor empleo de los otros factores. Más adelante trataremos del problema de la tierra.

Una segunda función de producción relaciona la producción final con el trabajo (h), la superficie (t), los gastos del ganado (G), los gastos de la maquinaria (M) y los demás gastos (C). Es decir: $P = f(h, t, G, M, C)$.

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{aligned}
37\ \alpha_0 + 102{,}3795\ \alpha_1 + 39{,}2422\ \alpha_2 + 146{,}6781\ \alpha_3 + 145{,}9810\ \alpha_4 + 166{,}4476\ \alpha_5 &= 187{,}3435\\
102{,}3795\ \alpha_0 + 284{,}0179\ \alpha_1 + 108{,}8511\ \alpha_2 + 405{,}6890\ \alpha_3 + 404{,}0110\ \alpha_4 + 460{,}6981\ \alpha_5 &= 518{,}4904\\
39{,}2422\ \alpha_0 + 108{,}8511\ \alpha_1 + 42{,}4193\ \alpha_2 + 155{,}5113\ \alpha_3 + 155{,}2456\ \alpha_4 + 176{,}8219\ \alpha_5 &= 198{,}8746\\
146{,}6781\ \alpha_0 + 405{,}6890\ \alpha_1 + 155{,}5113\ \alpha_2 + 584{,}7524\ \alpha_3 + 579{,}3482\ \alpha_4 + 660{,}2138\ \alpha_5 &= 743{,}7164\\
145{,}9810\ \alpha_0 + 404{,}0110\ \alpha_1 + 155{,}2456\ \alpha_2 + 579{,}3482\ \alpha_3 + 577{,}5952\ \alpha_4 + 657{,}2006\ \alpha_5 &= 739{,}7631\\
166{,}4476\ \alpha_0 + 460{,}6981\ \alpha_1 + 176{,}8219\ \alpha_2 + 660{,}2138\ \alpha_3 + 657{,}2006\ \alpha_4 + 749{,}5852\ \alpha_5 &= 843{,}1286
\end{aligned}$$

del que resulta:

$$\alpha_0 = 2{,}0235 \quad \alpha_1 = 0{,}1555 \quad \alpha_2 = 0{,}0252 \quad \alpha_3 = 0{,}2674 \quad \alpha_4 = 0{,}2131 \quad \alpha_5 = 0{,}1516$$

y la ecuación de la función de producción queda:

$$P = 105{,}55\ h^{0{,}1555}\ t^{0{,}0252}\ G^{0{,}2674}\ M^{0{,}2131}\ C^{0{,}1516}$$

El coeficiente de correlación múltiple $R_{p \cdot h't'gmc} = 0{,}75$, en el que los subscritos se refieren a los logaritmos de la producción y de los factores considerados. La correlación es significativa al nivel de 1 %. El coeficiente de determinación resulta $R^2_{p \cdot h't'gmc} = 0{,}5625$, muy semejante al obtenido anteriormente.

La elasticidad global de la producción es, en este caso, $\varepsilon = 0{,}8128$, menor que la unidad. De nuevo, rendimientos decrecientes de escala o, en otros términos, existencia de diseconomías de escala. Las elasticidades parciales son: 0,15 para el trabajo, algo superior a la obtenida anteriormente, pero aún relativamente baja; 0,02 para la tierra, inferior aún que la obtenida anteriormente; 0,27 para los gastos del ganado; 0,21 para los gastos de maquinaria, y 0,15 para los otros gastos.

Las productividades marginales de los factores en cuestión son:

$$\frac{\partial P}{\partial h} = \alpha_1 \frac{P}{h} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_2 \frac{P}{t} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial G} = \alpha_3 \frac{P}{G} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial M} = \alpha_4 \frac{P}{M} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial C} = \alpha_5 \frac{P}{C}$$

que para la explotación media (617 jornadas de trabajo, 12,20 hectáreas de superficie agrícola útil, 11.824 pesetas de gastos en la ganadería, 9.765 pesetas de gastos anuales en maquinaria y 33.413 pesetas de restantes gastos) resultan:

Productividad marginal del trabajo: 32,42 pesetas por jornada, que sigue siendo inferior al jornal medio de un trabajador agrícola en la zona.

Productividad marginal de la tierra: 266 pesetas por hectárea, que equivaldría a la renta a pagar por una hectárea de 6.650 pesetas de valor; bajísimo en comparación con el valor de una hectárea de regadío en la zona.

Productividad marginal de los gastos anuales de ganado: 2,91 pesetas; elevadísima; es decir, prueba concluyente de un empleo insuficiente de tal factor de producción, el ganado.

Productividad marginal de los gastos en maquinaria: 2,81 pesetas, también muy elevada, mostrando un empleo insuficiente de la maquinaria en las explotaciones.

Productividad marginal de los demás gastos: 0,58 pesetas; muy baja; es decir, empleo abusivo de los mismos.

Conclusiones generales: conveniencia de aumentar los efectivos de la ganadería y de invertir en maquinaria agrícola, disminuyendo el empleo de trabajo y reduciendo los demás gastos. Más adelante trataremos del factor tierra.

5. Determinación del tamaño óptimo de explotación.

El concepto de tamaño óptimo de explotación, o más propiamente el de la dimensión económica de la explotación, es un tanto impreciso y —no es necesario recordarlo— bastante manoseado. En efecto, la explotación agrícola de características más deseables, la explotación óptima, difiere notablemente en su estructura y organización según el punto de vista que se considere, el del empresario individual o el de la colectividad. Además, una serie de objetivos de carácter extraeconómico pueden jugar un papel importante en la determinación de la llamada explotación óptima, notablemente objetivos de política social. Una vez fijados los objetivos a perseguir, supuestas conocidas las funciones globales de producción en cada una de las regiones agrícolas de un pais, es posible, al menos en teoría, determinar las características de las explotaciones que satisfacen tales objetivos en grado máximo, es decir, las llamadas explotaciones óptimas.

El objetivo de un empresario que puede procurarse el capital necesario, la tierra y el trabajo a los precios de mercado, será la búsqueda del máximo beneficio. Si, por ejemplo, la función de producción es del tipo $P = f(h, t, G, M, C)$, el objetivo a hacer máximo es la función

$$\pi = P - (h \times p_h + t \times p_t + G + M + C)^*$$

para lo cual, diferenciando

$$d\pi = dP - p_h \times dh - p_t\, dt - dG - dM - dC = 0$$

o sea,

$$dP = p_h\, dh + p_t\, dt + dG + dM + dC$$

Por otra parte, diferenciando la función de producción

$$dP = \frac{\partial f}{\partial h} dh + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial G} dG + \frac{\partial f}{\partial M} dM + \frac{\partial f}{\partial C} dC$$

y, por consiguiente:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial h}}{p_h} = \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{p_t} = \frac{\partial f}{\partial G} = \frac{\partial f}{\partial M} = \frac{\partial f}{\partial C} = 1$$

De estas relaciones, que dan lugar a cinco ecuaciones, y la función de producción, podrán obtenerse los valores de las seis incógnitas (P, h, t, G, M, C) que hacen máximo el beneficio del empresario. Obtenemos así, no solamente la dimensión t óptima de la explotación en hectáreas, sino al mismo tiempo la combinación óptima de los factores de la producción y el valor de la producción final correspondiente.

El objetivo a perseguir por un empresario, propietario de una explotación agrícola, con escasas posibilidades de ampliar la dimensión de la misma, sería también hacer máximo el beneficio, que en este caso sería:

$$\pi = P - (h \times p_h + G + M + C)$$

siendo la función de producción, en su caso particular, $P = f(h, G, M, C)$, pues t = superficie agrícola útil de la explota-

* En el que p_h representa el jornal medio de un trabajador agrícola en la zona en cuestión, y p_t la renta de la tierra referida a la hectárea.

ción es para él una constante bien determinada. Claro está que, en este caso, no hay cuestión de determinar el tamaño óptimo de la explotación, que viene ya fijado de antemano. Se trata, sin embargo, de asociar a ese factor fijo los demás factores de la producción en cantidades óptimas. La solución es en todo semejante al caso anterior.

El objetivo de la colectividad raramente coincidirá con el del empresario individual. Es más probable que busque hacer máxima la eficiencia global de la producción, medida por la relación *output* (producción final)-*input* (total de factores puestos en juego). Es decir, suponiendo siempre la misma función de producción, el nuevo objetivo sería

$$\rho = P / (h \times p_h + t \times p_t + G + M + C) = \text{máximo}$$

para lo cual bastará hacer $d\rho = 0$; es decir:

$$d\rho = \frac{(h\,p_h + t\,p_t + G + M + C)\;\;dP - P\,(p_h\,dh + p_t\,dt + dG + dM + dC)}{(h\,p_h + t\,p_t + G + M + C)^2} = 0$$

lo que equivale a

$$(h\,p_h + t\,p_t + G + M + C)\;\;dP = P\,(p_h\,dh + p_t\,dt + dG + dM + dC)$$

Y como

$$dP = \frac{\partial f}{\partial h}\,dh + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial G}\,dG + \frac{\partial f}{\partial M}\,dM + \frac{\partial f}{\partial C}\,dC$$

sustituyendo *dP* por su valor se tendrá:

$$(h\,p_h + t\,p_t + G + M + C)\left(\frac{\partial f}{\partial h}\,dh + \frac{\partial f}{\partial t}\,pt + \frac{\partial f}{\partial G}\,dG + \frac{\partial f}{\partial M}\,dM + \frac{\partial f}{\partial C}\,dC\right) =$$
$$= P\,(p_h\,dh + p_t\,dt + dG + dM + dC)$$

lo que exige que sean iguales en ambos miembros los coeficientes de *dh, dt, dG, dM* y *dC*:

$$(p_h\,h + p_t\,t + G + M + C)\frac{\partial f}{\partial h} = P\,p_h$$
$$(p_h\,h + p_t\,t + G + M + C)\frac{\partial f}{\partial t} = P\,p_t$$
$$(p_h\,h + p_t\,t + G + M + C)\frac{\partial f}{\partial G} = P$$
$$(p_h\,h + p_t\,t + G + M + C)\frac{\partial f}{\partial M} = P$$
$$(p_h\,h + p_t\,t + G + M + C)\frac{\partial f}{\partial C} = P$$

que junto con la función de producción $P = f(h, t, G, M, C)$ forman un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas, con solución única (P, h, t, G, M, C), que constituye la combinación de factores óptima y la producción final correspondiente.

Como justificación del objetivo que hemos sugerido en este caso podríamos alegar que a la colectividad como tal, teniendo, por consiguiente, en cuenta solamente el interés general, le conviene utilizar los recursos escasos de que dispone (trabajo, tierra, capital) de forma que se obtenga de su utilización el mayor valor de producción por unidad de recursos empleados.

El problema, sin embargo, no es tan sencillo. Puede haber interés a utilizar una cantidad de mano de obra superior a la que resulta conveniente desde el punto de vista teórico, por falta de otras oportunidades de trabajo fuera de la agricultura; puede considerarse, por otra parte, conveniente realizar más inversiones de capital en otros sectores de la economía que se consideran más rentables o más críticos, etc. Consideraciones todas que afectan tanto a los objetivos que se persiguen, como a las soluciones teóricas, que deberán modificarse de acuerdo con las nuevas consideraciones.

En un trabajo futuro trataremos tal vez del planteamiento teórico de la organización y ordenación de la agricultura en el interior de un país y nos valdremos de otras técnicas que el análisis de las funciones de producción, programación lineal notablemente. Al final de este trabajo, en las conclusiones, explicaremos cuáles son, a nuestro entender, las principales limitaciones de las funciones de producción en cuanto a su aplicación a la planificación agrícola.

En el caso que nos ocupa, el de las explotaciones agrícolas de la Zona de La Violada, existe interés en saber si la superficie de las explotaciones es suficiente para ocupar plenamente a los miembros activos de la familia del colono —incluído el colono, naturalmente—, y, sobre todo, si no existe una mejor combinación de los factores de la producción, manteniendo fija la cantidad de trabajo que dé lugar a mejores resultados económicos. El objetivo que podríamos fijarnos *a priori* en estas explotaciones es el de organizar la producción de manera a obtener el máximo beneficio, contando con una cantidad fija de mano de obra (la constituída por el colono y familia), y pudiendo variar a voluntad las dosis de empleo de los demás factores de la producción (la tierra, entre ellos). El valor obtenido para t en la solución nos daría la dimensión óptima de la explotación para cada familia. Téngase en cuenta que un tal objetivo no constituye un caso particular, como pudiera pensarse, tratándose de colonos establecidos por el Instituto Nacional de Colonización. En efecto, una tal política de organizar las explotaciones agrícolas de manera a dar pleno empleo al agricultor y su familia, con exclusión de todo trabajo asalariado, y obtener al mismo tiempo, con esta condición, los mejores resultados económicos, está más o menos explícitamente en vigor en numerosos países. Se mezclan en ella intereses económicos (búsqueda del máximo beneficio o de la máxima eficiencia) con otros sociales (la creación de empresarios agrícolas cultivadores directos y la supresión de meros trabajadores por cuenta ajena en la agricultura).

Si consideramos que, en general, una explotación familiar —y a éstas nos referimos en lo que sigue— cuenta con dos unidades de trabajo como media (las explotaciones de La Violada dieron 2,06 unidades de trabajo como media), es decir, unas 600 jornadas de trabajo disponibles, tendremos que, sustituyendo h por 600 en la última función de producción calculada:

$$P = 105{,}55 \times 600^{0{,}1555} \times t^{0{,}0252}\, G^{0{,}2674}\, M^{0{,}2131}\, C^{0{,}1516}$$

y expresando el máximo del beneficio:

$$\pi = P - (t\, p_t + G + M + C) = \text{máximo}$$

que exige, a su vez:

$$d\pi = dP - p_t\, dt - dG - dM - dC = 0$$

o sea:

$$dP = p_t\, dt + dG + dM + dC$$

Por otra parte, diferenciando la función de producción, se tiene:

$$dP = \frac{\partial f}{\partial t}\, dt + \frac{\partial f}{\partial G}\, dG + \frac{\partial f}{\partial M}\, dM + \frac{\partial f}{\partial C}\, dC$$

e igualando, por consiguiente, los coeficientes de dt, dG, dM y dC, se tienen las relaciones

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0{,}0252 \times \frac{P}{t} = p_t \quad ; \quad t = \frac{0{,}0252}{p_t} \times P$$

$$\frac{\partial f}{\partial G} = 0{,}2674 \times \frac{P}{G} = 1 \quad ; \quad G = 0{,}2674 \times P$$

$$\frac{\partial f}{\partial M} = 0{,}2131 \times \frac{P}{M} = 1 \quad ; \quad M = 0{,}2131 \times P$$

$$\frac{\partial f}{\partial C} = 0{,}1516 \times \frac{P}{C} = 1 \quad ; \quad C = 0{,}1516 \times P$$

Es decir, obtenemos cada uno de los factores a emplear en función de la producción final correspondiente a la explotación óptima. Si sustituímos estos valores en la función de producción considerada obtendremos una ecuación en P solamente, que, debidamente simplificada y tomando logaritmos, se convierte en

$$\log P = \frac{1{,}9947 - 0{,}0252 \log p_t}{0{,}3427}$$

Si hacemos $p_t = 3.000$ pesetas, correspondiente a la renta relativa a una hectárea de tierra de 75.000 pesetas de valor, resulta:

$P = 367.200$ pts. ; $t = 3{,}08$ has. ; $G = 98.989$ pts. ; $M = 78.250$; $C = 55.667$

y un beneficio $\pi = 125.054$ pesetas, correspondiente a una remuneración de 208 pesetas por jornada de trabajo.

El resultado obtenido parece, a primera vista, satisfactorio, excepto en lo que se refiere a la superficie óptima: 3,08 hectáreas para 600 jornadas de trabajo. Por otra parte, no vemos cómo puede llegarse, en la zona considerada, a un grado de intensidad de cultivo tal que se obtengan más de 120.000 pesetas de producción final por hectárea.

Confesaremos, sin embargo, que tal resultado, en lo que a la superficie de la explotación se refiere, no nos ha sorprendido en lo más mínimo.

En efecto, hay motivos para desconfiar del coeficiente de elasticidad obtenido para la tierra en la función de producción. Se recordará lo que dijimos anteriormente relativo a las condiciones que favorecen la obtención de una función de producción satisfactoria: diversidad en las cantidades de empleo de los distintos factores de la producción que figuran en la función como variables independientes. Pues bien, las explotaciones escogidas presentan variaciones mínimas en cuanto a la superficie. Todas andan muy centradas alrededor del valor medio 12,20 hectáreas de superficie agrícola útil, y lo que agrava aún más la situación es el hecho de que las variaciones de tamaño existentes son enteramente neutralizadas por el efecto compensador de la calidad del suelo, pues con esta intención han sido distribuídas a los colonos por el Instituto Nacional de Colonización. Es, por consiguiente, de esperar que no exista ninguna relación entre la producción final obtenida y la superficie cultivada en tales condiciones.

En efecto, para probar tal falta de relación hemos calculado el coeficiente de correlación parcial producción final-tierra, que nos ha dado el resultado:

$$r_{pt' \cdot h'gmc} = 0{,}0937$$

valor totalmente insignificante, menor que 0,1, y desde luego nada significativo (5).

6. Funciones de producción a superficie constante.

A la vista de los pobres resultados obtenidos cuando se considera la superficie de las explotaciones como una variable más en la función de producción, en el caso que nos ocupa, naturalmente, la mejor solución nos ha parecido hacer desaparecer tal variable de la función de producción. Para ello nos hemos tomado el trabajo de referir cada uno de los datos originales (valor de la producción final, número de jornadas de trabajo, gastos relativos al ganado, a la maquinaria y restantes gastos anuales) a una superficie homogénea de 10 hectáreas, superficie que es, aproximadamente, la media de la zona. Para ello, primeramente hemos convertido la superficie total de cada explotación en superficie de regadío «homogeneizada», sin más que añadir a la superficie real de regadío un sexto de la superficie de secano, en cada caso. Los datos originales, que se refieren en cada explotación a esta superficie homogeneizada, han sido modificados proporcionalmente, de forma que puedan referirse a una superficie de 10 hectáreas. Los datos, de este modo, resultan comparables y no es preciso considerar más la superficie de la explotación como una variable en la función de producción. De esta manera se han obtenido los cuadros que figuran en el Anejo núm. 3.

La función de producción buscada será ahora de la forma $P = f(h, G, M, C)$, referida a 10 hectáreas de regadío, y en la que las variables son las mismas que anteriormente, a excepción de t, naturalmente, aunque los valores utilizados para la estimación de los distintos parámetros han sido modificados de la manera que acabamos de describir.

Las ecuaciones a resolver son, en este caso:

(5) Para dar al lector una simple idea del trabajo que representa la obtención de un solo coeficiente de correlación parcial en una función de seis variables, como la función de producción utilizada, le remitimos al Anejo núm. 4, donde encontrará la larga lista de fórmulas a desarrollar, cada una incluyendo no pocas operaciones aritméticas.

$$
\begin{aligned}
37\ \alpha_0 + 102{,}9723\,\alpha_1 + 147{,}2780\,\alpha_2 + 146{,}5825\,\alpha_3 + 167{,}2966\,\alpha_4 &= 187{,}9376\\
102{,}9723\,\alpha_0 + 287{,}3829\,\alpha_1 + 410{,}0297\,\alpha_2 + 407{,}9971\,\alpha_3 + 465{,}8051\,\alpha_4 &= 523{,}2656\\
147{,}2789\,\alpha_0 + 410{,}0297\,\alpha_1 + 590{,}0863\,\alpha_2 + 584{,}3272\,\alpha_3 + 666{,}5166\,\alpha_4 &= 749{,}4854\\
146{,}5825\,\alpha_0 + 407{,}9971\,\alpha_1 + 584{,}3272\,\alpha_2 + 582{,}2226\,\alpha_3 + 663{,}1269\,\alpha_4 &= 745{,}1753\\
167{,}2966\,\alpha_0 + 465{,}8051\,\alpha_1 + 666{,}5166\,\alpha_2 + 663{,}1269\,\alpha_3 + 757{,}2494\,\alpha_4 &= 850{,}1864
\end{aligned}
$$

de las que resulta:

$$\alpha_0 = 1{,}8723 \qquad \alpha_1 = 0{,}1694 \qquad \alpha_2 = 0{,}2841 \qquad \alpha_3 = 0{,}2052 \qquad \alpha_4 = 0{,}1750$$

y la ecuación de la función de producción queda:

$$P = 74{,}5\ h^{0{,}1694}\ G^{0{,}2841}\ M^{0{,}2052}\ C^{0{,}1750}$$

El coeficiente de correlación múltiple que relaciona los logaritmos de la producción final con los de las variables independientes resulta ser $R_{p \cdot h'gmc} = 0{,}7912$, significativo al nivel de 1 % y mayor que todos los hallados anteriormente, si exceptuamos el relativo a la primera función de producción calculada, $P = f(G_t)$, demasiado global, sin embargo.

El coeficiente de determinación $R^2_{p \cdot h'gmc} = 0{,}6259$ prueba que más del 60 % de las variaciones de la producción final están explicadas por el juego de los factores considerados. Es una verdadera lástima que no hayamos podido eliminar el efecto perturbador de la diferente calidad de suelos, ni, al menos, tenerlo en cuenta en la función de producción, pues, sin duda alguna, hubiéramos mejorado la función y el coeficiente de correlación. En realidad, el problema no presenta ninguna dificultad teórica, ya que disponemos de datos relativos a rendimientos físicos de los distintos cultivos, que nos dan un índice cuantitativo de la calidad del suelo. En lugar de haber referido los datos a las 10 hectáreas de regadío, sin corrección con arreglo a la calidad del suelo, podíamos haberla tenido en cuenta calculando un índice general de rendimientos, fácil de establecer (6), y combinando la superficie con el índice de rendimientos al multiplicar la una por el otro. Quede, no obstante, apuntado para una ocasión futura.

La elasticidad global de la producción es $\varepsilon = 0{,}8337$, menor que la unidad, mostrando una vez más rendimientos decrecientes de escala. Las elasticidades parciales son de 0,17 para el trabajo,

(6) Para la determinación del llamado "Indice de rendimiento" véanse las publicaciones *The Farm as a Business*, del Servicio de Extensión Agrícola del Reino Unido, y *Farm Management* y *Farm Management in the United States*, ambas publicaciones de la antigua Agencia Europea de Productividad de la O. E. C. E., en la segunda de las cuales colaboró el autor del presente trabajo.

0,28 para los gastos de ganado, 0,20 para los gastos de maquinaria y 0,17 para los otros gastos.

Las productividades marginales de los distintos factores son:

$$\frac{\partial P}{\partial h} = \alpha_1 \frac{P}{h} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial G} = \alpha_2 \frac{P}{G} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial M} = \alpha_3 \frac{P}{M} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial C} = \alpha_4 \frac{P}{C}$$

que dan los siguientes resultados:

—Productividad marginal del trabajo: 36,50 pesetas la jornada, es decir, bastante inferior al jornal medio de un trabajador agrícola de la zona.

—Productividad marginal de los gastos anuales en la ganadería: 3,08 pesetas, es decir, enorme rentabilidad de los mismos y, por tanto, insuficiencia de su empleo.

—Productividad marginal de los gastos en maquinaria: 2,81 pesetas, es decir, gran rentabilidad de los mismos y, por tanto, insuficiencia actual de su empleo.

—Productividad marginal de los otros gastos: 0,69 pesetas, es decir, empleo abusivo de los mismos, ya que la última peseta gastada sólo contribuye a un incremento de 0,69 pesetas en el valor de la producción final.

Conclusiones generales que se deducen de este somero análisis: conveniencia de aumentar los efectivos del ganado (vacas lecheras, notablemente, como se deduce a la vista de los resultados de las explotaciones de este tipo en la zona) y de invertir en maquinaria, que, además, tiene la ventaja de reemplazar mano de obra de bajísima productividad marginal, por su empleo abusivo; reducción de esta última y disminución de los demás gastos de la explotación. Se deduce, además, que si todo esto se refiere a 10 hectáreas, como es el caso, la superabundancia de la mano de obra indica, visto desde otro ángulo, la escasez de la superficie (10 hectáreas) para emplear productivamente esta mano de obra, es decir, con una productividad marginal del trabajo equivalente, al menos, al jornal de un trabajador asalariado.

7. Condiciones óptimas de producción y rentabilidad.

Consideremos primeramente el caso hipotético, y desde luego poco realista, en que la función de producción hallada para una explotación media de 10 hectáreas de regadío en la Zona de La

Violada sea válida en un intervalo suficientemente amplio como para abarcar la solución óptima, cualquiera que ésta sea.

La función de producción es, como se vió anteriormente:

$$P = 74{,}5\ h^{0{,}1694}\ G^{0{,}2841}\ M^{0{,}2052}\ C^{0{,}1750}$$

La función de beneficio a hacer máxima es:

$$\pi = P - (h \cdot p_h + G + M + C)$$

para lo cual bastará anular su diferencial:

$$d\pi = dP - p_h\, dh - dG - dM - dC = 0$$

de donde, teniendo en cuenta que

$$dP = \frac{\partial f}{\partial h}\, dh + \frac{\partial f}{\partial G}\, dG + \frac{\partial f}{\partial M}\, dM + \frac{\partial f}{\partial C}\, dC$$

resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \alpha_1 \frac{P}{h} = p_h \quad \text{o sea} \quad h = \frac{\alpha_1 P}{p_h} = \frac{0{,}1694}{p_h} \times P$$

$$\frac{\partial P}{\partial G} = \alpha_2 \frac{P}{G} = 1 \quad \text{o sea} \quad G = \alpha_2 P = 0{,}2841 \times P$$

$$\frac{\partial P}{\partial M} = \alpha_3 \frac{P}{M} = 1 \quad \text{o sea} \quad M = \alpha_3 P = 0{,}2052 \times P$$

$$\frac{\partial P}{\partial C} = \alpha_4 \frac{P}{C} = 1 \quad \text{o sea} \quad C = \alpha_4 P = 0{,}1750 \times P$$

Sustituyendo estos valores de los factores en función de P en la función de producción y tomando logaritmos, se obtiene, después de simplificar:

$$0{,}1663 \log P = 1{,}3128 - 0{,}1694 \log p_h$$

Según el valor que adoptemos para p_h, jornal medio de un trabajador agrícola asalariado, obtendremos el valor correspondiente de P, producción final óptima, y el cálculo de h, G, M y C es inmediato.

En el siguiente cuadro figuran los resultados obtenidos utilizando diversas hipótesis sobre el jornal de trabajador asalariado a considerar:

p_h	P	h	G	M	C	π	$\pi + H$	$(\pi+H)/h$
75	963.200	2.175	273.645	197.649	168.560	160.180	323.346	148,66
100	719.100	1.218	204.296	147.559	125.842	119.588	241.403	198,20
125	573.100	777	162.818	117.600	100.292	95.307	192.390	247,61
150	475.100	538	135.260	97.696	83.317	79.176	159.827	297,08
175	406.600	393	115.515	83.434	71.155	67.618	136.496	347,32
200	355.000	301	100.855	72.846	62.125	59.037	119.174	395,93

Recordemos que un tal objetivo, el máximo del beneficio bruto del empresario, valorando la producción y los factores (incluido el trabajo) a los precios de mercado, tiene sólo interés cuando el colono decide remunerar su trabajo y el de los miembros de su familia al nivel corriente de los jornales de trabajadores asalariados y que, por tanto, sólo se sirve del mismo hasta el momento en que la productividad marginal del trabajo resulte exactamente igual al jornal medio.

Cuando todo el trabajo es suministrado por el colono y familia, cual es el caso corriente en las explotaciones estudiadas, la columna ($\pi + H$) designa la remuneración total bruta del trabajo (para obtener la remuneración neta habría que descontar el importe de la renta de la tierra y algunos otros gastos anuales que no se han considerado: electricidad, contribuciones e impuestos, etcétera). La última columna indica la rentabilidad bruta del trabajo, es decir, la remuneración bruta por jornada de trabajo.

El caso de un empresario que deberá pagar un precio por cada unidad de factor utilizado en la producción no ofrece duda; según sea el p_h o jornal medio practicado en la zona deberá utilizar una combinación determinada de factores y un volumen de producción, de acuerdo con el cuadro calculado. Se observa, por ejemplo, cómo deberá reducir la escala de operación según aumenta el jornal medio; las reducciones consiguientes de mano de obra son mucho mayores que las que corresponderían a una variación inversamente proporcional del jornal, y mayores también que las reducciones en el empleo de los otros factores.

Pero los resultados obtenidos no son realistas, pues hemos considerado la función de producción como válida en un intervalo que sobrepasa con mucho a los datos utilizados (téngase, por ejemplo, en cuenta que la máxima producción final obtenida en una explotación de 10 hectáreas de la zona no ha llegado a las 300.000 pesetas). La función de producción refleja, más o menos bien, la situación existente en la zona, pero toda extrapolación de la misma abarcando, por ejemplo, niveles de producción superiores a los datos máximos utilizados resulta peligrosa y de escasa confianza.

Por eso hemos prescindido de todos los casos hipotéticos en los que la producción final supera el valor de 300.000 pesetas por 10 hectáreas de superficie, para acomodarnos a las posibilidades reales de la región.

Contamos, pues, con una condición suplementaria al caso general antes tratado: la limitación de la producción final a un cierto nivel, en ningún caso superior a 300.000 pesetas.

Las condiciones de beneficio máximo serán entonces las siguientes:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial h}}{p_h} = \frac{\partial f}{\partial G} = \frac{\partial f}{\partial M} = \frac{\partial f}{\partial C} = \lambda$$

en que

$$\lambda \geqq 1$$

puesto que, sea cual sea el nivel absoluto de empleo de los factores o el nivel de producción obtenida, la igualdad de productividades marginales deberá darse siempre, ya que si, por ejemplo,

$$\frac{\partial f}{\partial G} > \frac{\partial f}{\partial C}$$

convendrá reducir gastos corrientes e invertir en la ganadería, que resulta más rentable, y así continuaríamos hasta conseguir que

$$\frac{\partial f}{\partial G} = \frac{\partial f}{\partial C}$$

ya que al aumentar las inversiones en ganado disminuiría la productividad marginal de las mismas, y al disminuir los gastos C aumentaría su productividad marginal, hasta que ambas llegasen a igualarse.

Tales condiciones equivalen, por tanto, en la función de producción considerada a:

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \alpha_1 \frac{P}{h} = 0{,}1694 \frac{P}{h} = \lambda\, p_h \quad \text{de donde} \quad h = \frac{0{,}1694}{\lambda\, p_h} \times P$$

$$\frac{\partial f}{\partial G} = \alpha_2 \frac{P}{G} = 0{,}2841 \frac{P}{G} = \lambda \quad \text{de donde} \quad G = \frac{0{,}2841}{\lambda} \times P$$

$$\frac{\partial f}{\partial M} = \alpha_3 \frac{P}{M} = 0{,}2052 \frac{P}{M} = \lambda \quad \text{de donde} \quad M = \frac{0{,}2052}{\lambda} \times P$$

$$\frac{\partial f}{\partial C} = \alpha_4 \frac{P}{C} = 0{,}1750 \frac{P}{C} = \lambda \quad \text{de donde} \quad C = \frac{0{,}1750}{\lambda} \times P$$

Sustituyendo estos valores de h, G, M y C en la función de producción, tomando logaritmos y simplificando, se obtiene la ecuación

$$0{,}1663 \log P = 1{,}3128 - 0{,}1694 \log p_h - 0{,}8337 \log \lambda$$

Considerando distintos niveles de la producción final, $P = 300.000$, 275.000, 250.000, 225.000, 200.000, 175.000 y 150.000 pesetas, y diversas hipótesis sobre el jornal medio, $p_h = 75$, 100, 125, 150, 175 y 200 pesetas por jornada, se obtendrán los resultados siguientes:

$p_h = 75$

P	λ	h	G	M	C	π	$\pi + H$	$(\pi+H)/h$
300.000	1,26	538	67.643	48.857	41.667	101.500	141.833	263,72
275.000	1,28	485	61.037	44.086	37.598	95.885	132.279	272,74
250.000	1,31	431	54.217	39.160	33.397	90.898	123.226	285,91
225.000	1,34	379	47.703	34.455	29.384	85.014	113.458	299,36
200.000	1,37	330	41.474	29.956	25.547	78.293	103.023	312,19
175.000	1,41	280	35.260	25.468	21.720	71.527	92.552	330,54
150.000	1,45	234	29.390	21.227	18.103	63.756	81.280	347,35

$p_h = 100$

P	λ	h	G	M	C	π	$\pi + H$	$(\pi+H)/h$
300.000	1,19	427	71.622	51.731	44.118	90.189	132.889	311,21
275.000	1,21	385	64.568	46.636	39.773	85.523	124.023	322,14
250.000	1,23	344	57.744	41.707	35.569	80.580	114.980	334,24
225.000	1,26	302	50.732	36.643	31.250	76.175	105.375	352,23
200.000	1,29	263	44.046	31.814	27.132	70.708	97.008	368,85
175.000	1,33	223	37.381	27.000	23.026	65.293	87.593	392,79
150.000	1,37	185	31.106	22.467	19.160	58.767	77.267	417,66

$p_h = 125$

P	λ	h	G	M	C	π	$\pi + H$	$(\pi+H)/h$
300.000	1,14	357	74.763	54.000	46.053	80.559	125.184	350,65
275.000	1,16	321	67.351	48.646	41.487	77.391	117.516	366,09
250.000	1,18	287	60.191	43.474	37.076	73.384	109.259	380,69
225.000	1,21	252	52.828	38.157	32.541	69.974	101.474	402,67
200.000	1,23	228	46.195	33.366	28.455	64.484	91.984	418,11
175.000	1,27	187	39.147	28.275	24.114	60.089	83.464	446,33
150.000	1,31	155	32.530	23.496	20.038	54.561	73.936	477,01

$p_h = 150$

P	λ	h	G	M	C	π	$\pi + H$	$(\pi+H)/h$
300.000	1,10	308	77.481	55.964	47.727	72.628	118.828	385,80
275.000	1,12	277	69.756	50.384	42.969	70.341	111.891	403,94
250.000	1,14	248	62.303	45.000	38.377	67.120	104.320	420,64
225.000	1,16	219	55.105	39.802	33.944	63.299	96.149	439,04
200.000	1,19	190	47.748	34.487	29.412	59.853	88.353	465,01
175.000	1,22	162	40.752	29.434	25.102	55.412	79.712	492,05
150.000	1,26	134	33.821	24.428	20.833	50.818	70.918	529,24

$p_h = 175$

P	λ	h	G	M	C	π	$\pi + H$	$(\pi+H)/h$
300.000	1,06	274	80.406	58.075	49.528	64.041	111.991	408,73
275.000	1,08	246	72.340	52.250	44.560	62.800	105.850	430,28
250.000	1,10	220	64.568	46.636	39.773	60.523	99.023	450,10
225.000	1,13	193	56.568	40.858	34.845	58.754	92.729	480,46
200.000	1,15	168	49.409	35.687	30.435	55.069	84.469	502,79
175.000	1,18	143	42.133	30.432	25.952	51.457	76.482	534,84
150.000	1,22	119	34.930	25.229	21.516	47.500	68.325	574,16

$p_h = 200$

P	λ	h	G	M	C	π	$\pi + H$	$(\pi+H)/h$
300.000	1,03	247	82.747	59.767	50.971	57.115	106.515	431,23
275.000	1,05	222	74.407	53.743	45.833	56.617	101.017	455,03
250.000	1,07	198	66.378	47.944	40.887	55.190	94.790	478,74
225.000	1,10	173	58.111	41.973	35.795	54 521	89.121	515,15
200.000	1,12	151	50.732	36.643	31.250	51.175	81.375	538,91
175.000	1,15	129	43.232	31.226	26.630	48.112	73.912	572,96
150.000	1,19	107	35.811	25.864	22.059	44.865	66.265	619,30

Un caso relativamente realista sería el de $p_h = 100$ pesetas por jornada, y $P = 200.000$ pesetas, valor de producción final superado por 4 de las 37 explotaciones consideradas; por tanto, posible de obtener en las demás explotaciones. Tal explotación de 10 hectáreas de regadío, como lo son todas las consideradas, únicamente ocuparía productivamente el trabajo de 263 jornadas, que contrasta con las 600 jornadas disponibles en la mayoría de las explotaciones. Prueba la existencia de paro encubierto o, mejor aún, subempleo económico en las explotaciones que son objeto de este trabajo. Tal organización de la producción ($P = 200.000$ pesetas, $h = 263$, $G = 44.046$, $M = 31.814$, $C = 27.132$) da un beneficio bruto del empresario de aproximadamente 7.000 pesetas por hectárea y, posiblemente, un beneficio neto de 3.000 pesetas por hectárea. La remuneración neta del trabajo del colono y familiares (en realidad, del colono solo si sólo se emplean 263 jornadas de trabajo) resulta, aproximadamente, de 350 pesetas por jornada. Tal solución implica, por otra parte, un aumento de las inversiones de la explotación media en ganado y maquinaria y una ligera reducción en los otros gastos considerados.

Pero no es ésta la mayor utilidad de los cuadros que hemos calculado, sino más bien la determinación del tamaño óptimo de las explotaciones, como veremos más adelante.

Ahora vamos a centrarnos más en el caso real que nos ocupa:

la determinación de la organización óptima de una explotación de 10 hectáreas de regadío que dispone de dos unidades de trabajo, o sea de unas 600 jornadas al año, con las características medias de la Zona de La Violada (suelo, temperaturas, precipitaciones, etc.).

La función de producción a considerar es:

$$P = 74{,}5 \times 600^{0{,}1694} \times G^{0{,}2841} \times M^{0{,}2052} \times C^{0{,}1750}$$

Supongamos para empezar que la función es válida en un intervalo suficientemente amplio como para cubrir en todo caso la solución óptima.

Procediendo como hemos explicado ya en numerosas ocasiones, el objetivo de máximo beneficio del empresario, que en este caso suministra también el trabajo, implica que:

$$\frac{\partial f}{\partial G} = 0{,}2841 \frac{P}{G} = 1 \quad \text{de donde} \quad G = 0{,}2841\, P$$

$$\frac{\partial f}{\partial M} = 0{,}2052 \frac{P}{M} = 1 \quad \text{de donde} \quad M = 0{,}2052\, P$$

$$\frac{\partial f}{\partial C} = 0{,}1750 \frac{P}{C} = 1 \quad \text{de donde} \quad C = 0{,}1750\, P$$

que sustituídos en la ecuación de la función de producción dan como resultado:

$$P = 503.000 \text{ pts.} \quad G = 142.902 \text{ pts.} \quad M = 103.216 \text{ pts.} \quad C = 88.025 \text{ pts.}$$

pero tal solución parece irrealista, pues tal volumen de producción final rebasa con mucho el obtenido en las mejores explotaciones de la zona.

Consideremos, por lo tanto, que la función de producción es válida solamente entre ciertos límites, que estableceremos teniendo en cuenta los resultados reales obtenidos en las explotaciones de la zona.

En efecto, si limitamos la producción a un cierto nivel, que no puede excederse, tendremos de nuevo como condiciones de beneficio máximo:

$$\frac{\partial f}{\partial G} = \frac{\partial f}{\partial M} = \frac{\partial f}{\partial C} = \lambda \quad \text{siendo} \quad \lambda \geq 1$$

de donde es fácil pasar a

$$G = \frac{0{,}2841}{\lambda} P \quad ; \quad M = \frac{0{,}2052}{\lambda} P \quad ; \quad C = \frac{0{,}1750}{\lambda} P$$

valores que sustituídos en la función de producción, tomando logaritmos y simplificando, conducen a:

$$0{,}3357 \log P = 1{,}9140 - 0{,}6643 \log \lambda$$

y haciendo, de nuevo, las mismas hipótesis respecto al P máximo:

P	λ	G	M	C	π
300.000	1,30	65.561	47.354	40.385	146.700
275.000	1,36	57.446	41.493	35.396	140.675
250.000	1,42	50.018	36.127	30.810	133.045
225.000	1,50	42.615	30.780	26.250	125.355
200.000	1,59	35.736	25.811	22.012	116.441
175.000	1,70	29.245	21.123	18.015	106.617
150.000	1,84	23.160	16.728	14.265	95.846

En el caso de $P = 200.000$ pesetas las inversiones en ganado y maquinaria deberían prácticamente doblarse y los demás gastos deberían reducirse a los dos tercios, aproximadamente.

8. Tamaño óptimo de las explotaciones de La Violada.

Hemos visto cómo el procedimiento general para la obtención de la superficie óptima de explotación, a partir de la función de producción, no nos servía de nada en el caso que nos ocupa, por la falta de significación de la superficie de la explotación en la función general de producción hallada. No hemos, sin embargo, renunciado a determinar tal superficie óptima. El procedimiento seguido es sencillo y racional.

En efecto, si a partir de la función de producción relativa a una superficie considerada —10 hectáreas en el caso estudiado— se determina el grado óptimo de empleo de la mano de obra, por una simple regla de tres podrá determinarse cuál es la superficie óptima que corresponde a una determinada cantidad de trabajo disponible (600 jornadas en nuestro caso). Así, a cada valor de h obtenido corresponde uno de t según la relación

$$\frac{10}{t} = \frac{h}{600}$$

de donde

$$t = \frac{10 \times 600}{h}$$

Así, de los cuadros obtenidos anteriormente, cuando limitábamos la producción final a varios niveles y establecíamos diversas hipótesis relativas al jornal medio de un trabajador agrícola en la región, por simple aplicación de esta fórmula obtenemos:

P \ p_h	75	100	125	150	175	200
300.000	11,15	14,05	16,81	19,48	21,90	24,29
275.000	12,37	15,58	18,69	21,66	24,39	27,03
250.000	13,92	17,44	20,90	24,19	27,27	30,30
225.000	15,83	19,87	23,81	27,40	31,09	34,68
200.000	18,18	22,81	27,27	31,58	35,71	39,73
175.000	21,43	26,90	32,08	37,04	41,96	46,51
150.000	25,64	32,43	38,71	44,78	50,42	56,07

que da los valores en hectáreas de la superficie óptima de regadío en cada uno de los supuestos sobre nivel máximo de producción que podrá alcanzarse y nivel de jornales.

Si volvemos a considerar el caso de $P = 200.000$ pesetas y $p_h = 100$ pesetas, encontramos $t = 22{,}81$ hectáreas, sensiblemente doble de la superficie actual de la explotación media.

Creemos razonable un objetivo tal como el propuesto, conducente a constituir explotaciones familiares en las que el trabajo disponible del colono y familia (la cifra de 600 jornadas podrá variarse, en más o en menos, según las disponibilidades de la familia) se emplee remuneradoramente (es decir, de tal forma que la productividad marginal iguale al menos el jornal medio del trabajador asalariado). Por otra parte, cuando se trata de planificar una región agrícola, y es en este momento cuando surge el problema de la determinación del tamaño óptimo de la empresa, convendrá tener a la vista no sólo las circunstancias del momento, sino, sobre todo, las que prevalecerán en un futuro más o menos próximo. Así, por ejemplo, en el caso concreto que hemos estudiado, si se tratase de aplicar los resultados obtenidos a la planificación de la región considerada en este momento, sería conveniente considerar un p_h que parezca razonable esperar teniendo en cuenta la probable evolución de los salarios en el campo.

9. Conclusiones.

A lo largo de este trabajo, y especialmente en lo que se refiere a la segunda parte, nos hemos ocupado muy poco de las funciones parciales de producción, que ligan la producción de un determinado producto agrícola (el trigo, la leche, los huevos) a algunos factores importantes en su obtención (abonos, piensos). Tales funciones son, sin embargo, importantísimas y su conocimiento es indispensable para todos aquellos que de una manera u otra se ocupan de mejorar la agricultura de un país, sean investigadores agronómicos o zootécnicos, agentes de extensión agrícola, encargados de aconsejar a los agricultores sobre fórmulas de abonado, de alimentación del ganado, etc., o, en general, responsables de la gestión y administración de explotaciones agrícolas. Si bien tales funciones de producción son de manejo indispensable para el economista rural, es al investigador en ramas más técnicas de la agricultura, como la agronomía o la zootecnia, a quien corresponde fundamentalmente su obtención. Nos referimos, naturalmente, a las funciones físicas de producción. Mas, sin un conocimiento previo del tipo de función buscada y de su utilización posterior, es harto probable que las experiencias agronómicas o zootécnicas no den los mejores resultados. Por esta razón los investigadores en las disciplinas agrícolas clásicas deben trabajar en estrecha cooperación con los investigadores en economía agrícola, especialmente en el diseño de las experiencias que lleven a cabo, con objeto de facilitar la obtención de funciones de producción. Aparte el interés inmediato para el agricultor que presenta el conocimiento de las funciones parciales de producción, una vez que han sido debidamente traducidas en forma de recomendaciones concretas, existen otras numerosas aplicaciones de tal tipo de funciones. Citaremos una sola, como ejemplo: la determinación de funciones probables de oferta. En efecto, a cada hipótesis sobre precios del producto y de los factores puestos en juego corresponde un nivel óptimo de empleo de éstos y de producción de aquél. Por un procedimiento cualquiera de agregación se puede, por consiguiente, estimar el volumen total de producción a esperar en función de la relación del precio del producto a los precios de los factores, es decir, la función de oferta. Simultáneamente puede obtenerse la función de demanda de los factores en cuestión.

Las funciones globales de producción, de las que nos hemos ocupado más en esta segunda parte, constituyen un instrumento utilísimo del análisis económico y son de un gran valor práctico, pues de ellas se deducen las grandes líneas de una política agraria conducente a eliminar o, al menos, paliar los desequilibrios existentes, en un momento dado, en la utilización de los distintos factores de la producción o recursos básicos de una región o país. El conocimiento de las funciones de producción correspondientes a distintos sistemas de explotación y a distintas regiones permite determinar en cada caso la combinación óptima de recursos a emplear, el tamaño deseable de explotación, el nivel óptimo de producción, etc., y orientar así la política de producción con un mayor conocimiento de causa. Permite, por otra parte, prever los efectos que las variaciones en la relación de precios percibidos/precios pagados por el agricultor ejercerán sobre la producción y facilita, en general, el proceso de adaptación de la agricultura al desarrollo económico. Constituyen las funciones globales de producción un instrumentao flexible de análisis y se adaptan fácilmente a toda una serie de objetivos de carácter económico y social, como hemos visto a lo largo de este estudio. Su mayor utilidad, no obstante, se presenta cuando las funciones de producción se refieren, en cada caso, a una determinada región agrícola de características económicas homogéneas y a un determinado sistema de producción, considerándose una ventaja el que, dándose tales circunstancias exista, por otra parte, una gran variación en lo que a cantidad de recursos utilizados se refiere. El conocimiento de las funciones de producción relativas a distintos sistemas de producción y a distintas regiones permite estudiar las ventajas comparativas de unas u otras regiones con respecto a determinados sistemas de producción o las ventajas relativas de unos tipos de producción sobre otros en cada región, de acuerdo con las características de cada explotación (superficie, jornadas de trabajo disponibles, etc.).

Los principales inconvenientes prácticos de las funciones globales de producción son: *a)* la necesidad de disponer de una buena información contable de las explotaciones agrícolas de la zona o zonas a estudiar; *b)* la dificultad de hacer intervenir en la función el factor gestión, que tanta importancia tiene en los resultados de la explotación, y *c)* su carácter histórico, al estar basadas en datos contables del pasado, aunque éste sea reciente, que las hace poco apropiadas para prever resultados a largo plazo (en efecto, cambios tecnológicos afectan la forma de la función de producción).

En todo caso, constituyen un instrumento valioso del que los autores anglosajones llaman análisis «positivo», basado en datos reales y son un buen complemento de otras técnicas «normativas», utilizadas corrientemente en la planificación agrícola (7).

En la situación concreta estudiada en este trabajo, relativa a las explotaciones agrícolas de la Zona de La Violada, se han dado algunas características favorables para la obtención de funciones globales de producción, principalmente la homogeneidad económica de la zona y la escasa variación en cuanto al sistema de producción practicado en las explotaciones en cuestión. Por otra parte, las variaciones mínimas de la superficie de las explotaciones, hecho agravado por la compensación efectuada con arreglo a la calidad del suelo, impidieron que este importantísimo factor de la producción jugase un papel significativo en las funciones de producción calculadas. Esto nos obligó a determinar una función de producción a superficie constante, a partir de la cual, por un procedimiento indirecto, pudimos determinar la superficie óptima de las explotaciones bajo diversos supuestos. El análisis efectuado no se ha llevado más lejos y tal vez hayamos mostrado excesiva prudencia en las conclusiones, debido a cierta desconfianza en los datos utilizados. Aun cuando el cuestionario original utilizado fué bastante completo y concienzudamente preparado y los encuestadores estaban suficientemente entrenados, no pudo evitarse cierta irregularidad en las respuestas de los colonos, debido unas veces al desconocimiento (debe recordarse que se tuvieron que fiar exclusivamente de la memoria, faltos de toda contabilidad), y otras, quizá, a cierta desconfianza natural en una encuesta de este tipo.

(7) En un trabajo próximo nos ocuparemos de tales técnicas "normativas" en lo que se refiere a la programación de las explotaciones agrícolas.

ANEJO N.º 1

DETERMINACIÓN DE FUNCIONES DE PRODUCCIÓN EN TÉRMINOS MONETARIOS

Cuadro núm. 1

Datos relativos a las explotaciones de La Violada.

Nº de la explotación	Valor de la producción final P (pts.)	Gastos anuales de trabajo H (pts.)	Gastos anuales del capital territorial T (pts.)	Gastos anuales del capital de explotación E (pts.)	Restantes gastos anuales G (pts.)	Total gastos anuales G_t (pts.)
1/c/7	122.950	72.630	7.439	6.244	30.131	116.444
2/c/1	113.835	37.800	8.881	8.900	73.414	128.995
2/c/3	87.218	35.400	6.707	7.137	48.036	97.280
2/c/2	117.772	37.700	7.359	14.612	48.631	108.302
4/c/1	101.986	36.000	6.297	7.934	38.517	88.748
4/c/2	184.017	77.400	8.319	16.556	98.876	201.151
4/c/3	165.070	102.600	16.908	6.377	73.031	198.916
4/c/4	212.673	68.500	9.437	11.647	67.116	156.700
4/c/5	63.498	67.400	3.823	1.224	34.860	107.307
1/c/1	124.833	40.870	2.807	6.785	64.048	114.510
1/c/2	136.840	34.070	4.950	4.459	47.553	91.032
1/c/5	197.022	59.550	2.593	12.236	56.078	130.457
1/c/6	81.491	50.580	5.589	5.098	32.429	93.696
6/c/1	216.204	61.560	4.271	15.153	58.915	139.899
6/c/2	121.702	37.780	2.541	2.526	35.017	77.864
6/c/3	146.064	37.740	5.641	11.618	42.607	97.606
6/c/5	243.623	74.400	6.120	16.717	91.946	189.183
6/c/6	107.979	33.570	2.508	8.125	59.104	103.299
6/c/7	134.139	59.430	8.059	7.922	62.418	137.829
1/c/3	87.917	44.840	2.951	4.682	37.974	90.447
1/c/4	78.351	39.120	3.241	7.033	50.520	99.914
5/c/1	117.296	30.480	6.871	11.690	52.868	101.909
5/c/2	125.370	43.100	3.472	3.908	63.300	113.780
5/c/3	119.210	74.400	3.684	4.444	49.707	132.235
5/c/5	244.004	42.450	4.639	26.609	43.906	117.604
5/c/6	69.879	55.950	4.537	11.646	27.987	100.120
5/c/7	120.602	40.200	4.991	10.449	59.954	115.594
5/c/8	69.302	46.950	7.189	4.134	18.059	76.332
5/c/9	90.380	59.460	2.893	7.707	36.068	106.078
2/c/4	120.202	48.000	6.477	8.628	41.495	104.600
2/c/5	103.042	45.300	4.826	6.646	43.946	100.718
3/c/1	66.512	30.000	5.508	4.457	29.748	69.713
3/c/2	97.199	75.000	8.681	9.585	37.542	130.808
3/c/3	99.856	35.200	4.170	5.960	74.179	109.509
3/c/4	96.003	68.460	8.689	4.312	83.838	175.299
3/c/5	91.172	90.000	3.157	11.058	50.695	154.910
3/c/6	91.432	78.360	6.044	10.062	35.859	130.325
	$\Sigma P = 4.566.645$	$\Sigma H = 1.972.250$	$\Sigma T = 212.219$	$\Sigma E = 324.280$	$\Sigma G = 1.890.372$	$\Sigma G_t = 4.399.1$
	$\overline{P} = 123.423$	$\overline{H} = 53.304$	$\overline{T} = 5.736$	$\overline{E} = 8.764$	$\overline{G} = 51.091$	$\overline{G_t} = 118.89$

CUADRO NÚM. 2

Logaritmos de los datos.

Nº de la explotación	(p) log P	(h) log H	(t) log T	(e) log E	(g) log G	(c) log C
1/c/7	5.0898	4,8611	3,8715	3,7955	4,4790	4,5608
2/c/1	5,0562	4,5775	3,9485	3,9494	4,8658	4,9155
2/c/3	4,9406	4,5490	3,8265	3,8535	4,6816	4,7417
2/c/2	5,0710	4,5763	3,8668	4,1647	4,6869	4,8010
4/c/1	5,0086	4,5563	3,7991	3,8995	4,5856	4,6670
4/c/2	5,2650	4,8887	3,9201	4,2190	4,9951	5,0622
4/c/3	5,2176	5,0012	4,2280	3,8046	4,8635	4,8999
4/c/4	5,3277	4,8357	3,9748	4,0660	4,8268	4,8963
4/c/5	4,8028	4,8287	3,5824	3,0878	4,5423	4,5573
1/c/1	5,0963	4,6114	3,4482	3,8316	4,8065	4,8502
1/c/2	5,1362	4,5324	3,6946	3,6192	4,6772	4,7161
1/c/5	5,2945	4,7749	3,4138	4,0911	4,7488	4,8345
1/c/6	4,9111	4,7040	3,7473	3,7074	4,5109	4,5743
6/c/1	5,3349	4,7893	3,6305	4,1805	4,7702	4,8696
6/c/2	5,0853	4,5773	3,4050	3,4024	4,5444	4,5745
6/c/3	5,1645	4,5768	3,7514	4,0651	4,6295	4,7342
6/c/5	5,3867	4,8716	3,7867	4,2234	4,9635	5,0360
6/c/6	5,0332	4,5259	3,3993	3,9098	4,7716	4,8275
6/c/7	5,1274	4,7740	3,9063	3,8988	4,7953	4,8472
1/c/3	4,9400	4,6517	3,4700	3,6704	4,5795	4,6300
1/c/4	4,8940	4,5924	3,5107	3,8471	4,7035	4,7601
5/c/1	5,0693	4,4840	3,8370	4,0678	4,7232	4,8099
5/c/2	5,0980	4,6345	3,5406	3,5919	4,8014	4,8268
5/c/3	5,0763	4,8716	3,5663	3,6478	4,6964	4,7336
5/c/5	5,3874	4,6279	3,6664	4,4249	4,6425	4,8489
5/c/6	4,8443	4,7478	3,6568	4,0662	4,4470	4,5980
5/c/7	5,0814	4,6042	3,6982	4,0191	4,7778	4,8476
5/c/8	4,8407	4,6716	3,8567	3,6164	4,2567	4,3462
5/c/9	4,9561	4,7742	3,4538	3,8869	4,5571	4,6411
2/c/4	5,0799	4,6812	3,8114	3,9359	4,6180	4,7000
2/c/5	5,0130	4,6561	3,6836	3,8226	4,6429	4,7041
3/c/1	4,8229	4,4771	3,7410	3,6490	4,4735	4,5341
3/c/2	4,9877	4,8751	3,9386	3,9816	4,5745	4,6733
3/c/3	4,9994	4,5465	3,6201	3,7752	4,8073	4,8460
3/c/4	4,9823	4,8354	3,9390	3,6347	4,9234	4,9452
3/c/5	4,9599	4,9542	3,4993	4,0437	4,7050	4,7906
3/c/6	4,9611	4,8941	3,7813	4,0027	4,5546	4,6620

$\Sigma p = 187{,}3431$ $\Sigma h = 173{,}9917$ $\Sigma t = 137{,}4716$ $\Sigma e = 143{,}4832$ $\Sigma g = 173{,}2288$ $\Sigma c = 175{,}863$

$\Sigma p^2 = 949{,}4354$ $\Sigma h^2 = 818{,}9421$ $\Sigma t^2 = 512{,}1244$ $\Sigma e^2 = 558{,}7163$ $\Sigma g^2 = 811{,}0985$ $\Sigma c^2 = 836{,}687$

$\Sigma ph = 881{,}1511$ $\Sigma te = 533{,}4689$ $\Sigma pc = 891{,}0253$

$\Sigma ht = 646{,}7377$ $\Sigma eg = 672{,}2521$ Σpg

$\Sigma pt = 696{,}2410$ $\Sigma tg = 643{,}8115$ $\Sigma pe = 727{,}3387$

$\Sigma he = 674{,}8466$ $\Sigma hg = 814{,}7434$ $\Sigma hc = 827{,}1338$

$\Sigma hk = 834{,}5053$

ANEJO N.° 2

DETERMINACIÓN DE FUNCIONES DE PRODUCCIÓN MIXTA

CUADRO NÚM. 1

Datos de las explotaciones de La Violada.

Nº de la explotación	Valor de la producción final P (pts.)	Nº de jornadas de trabajo h	Gastos anuales del capital de explotación: Ganado G (pts.)	Maquinaria M (pts.)	Total E (pts.)	Gastos anuales d capital circulant C (pts.)
1/c/7	122.950	1.060	8.052	5.882	13.862	18.899
2/c/1	113.835	500	12.262	14.896	27.158	49.268
2/c/3	87.218	460	9.019	4.973	13.992	36.489
2/c/2	117.772	420	17.639	9.226	26.865	30.689
4/c/1	101.986	440	7.391	8.924	16.315	26.399
4/c/2	184.017	960	55.366	11.025	66.391	43.200
4/c/3	165.070	1.070	19.750	10.775	30.521	48.069
4/c/4	212.673	716	11.293	13.638	24.931	47.407
4/c/5	63.498	720	7.154	2.115	9.269	24.707
1/c/1	124.833	419	14.832	16.758	31.590	33.770
1/c/2	136.840	390	12.988	5.094	18.082	30.456
1/c/5	197.022	625	22.301	15.284	37.585	26.734
1/c/6	81.491	515	9.495	5.082	14.577	20.758
6/c/1	216.204	626	12.787	14.287	27.074	41.564
6/c/2	121.702	410	4.108	5.049	9.157	22.304
6/c/3	146.064	418	19.323	9.217	28.540	21.192
6/c/5	243.623	880	21.216	14.284	35.500	61.875
6/c/6	107.979	351	16.803	13.848	30.651	31.091
6/c/7	134.139	906	2.393	18.088	20.481	44.543
1/c/3	87.917	531	4.866	5.917	10.783	29.665
1/c/4	78.351	455	14.621	9.461	24.082	29.258
5/c/1	117.296	320	9.162	14.173	23.335	29.419
5/c/2	125.370	580	5.889	15.516	21.405	40.602
5/c/3	119.210	770	3.696	6.698	10.344	38.868
5/c/5	244.004	564	34.007	10.202	44.209	21.542
5/c/6	69.879	610	4.627	12.828	17.455	18.733
5/c/7	120.602	495	6.818	10.490	17.308	47.051
5/c/8	69.302	540	3.436	2.769	6.175	15.875
5/c/9	90.380	605	4.952	7.462	12.414	28.013
2/c/4	120.202	500	14.141	6.655	20.796	25.081
2/c/5	103.042	490	5.104	7.276	12.380	34.178
3/c/1	66.512	930	3.142	9.690	12.832	19.636
3/c/2	97.199	750	5.194	8.492	13.686	29.579
3/c/3	99.856	378	11.369	7.557	18.926	41.399
3/c/4	96.003	700	9.339	6.607	15.946	66.497
3/c/5	91.172	900	7.040	13.503	20.543	33.865
3/c/6	91.432	820	5.905	7.866	13.771	27.624
	$\Sigma P = 4.566.645$	$\Sigma h = 22.824$	$\Sigma G = 437.480$	$\Sigma M = 361.307$	$\Sigma E = 798.787$	$\Sigma C = 1.236.2$
	$\overline{P} = 123.423$	$\overline{h} = 617$	$\overline{G} = 11.824$	$\overline{M} = 9.765$	$\overline{E} = 21.589$	$\overline{C} = 33.413$

CUADRO NÚM. 2

Logaritmos de los datos.

(p) log P	(h') log h	(g) log G	(m) log M	(e) log E	(c) log C	(t') log t
5,0898	3,0253	3,9059	3,7695	4,1321	4,2764	1,3979
5,0566	2,6990	4,0885	4,1730	4,4339	4,6925	1,2052
4,9406	2,6628	3,9552	3,6966	4,1459	4,5621	1,1102
5,0710	2,6238	4,2465	3,9650	4,4292	4,4870	1,1386
5,0086	2,6434	3,8687	3,9506	4,2126	4,4216	0,9248
5,2650	2,9823	4,7432	4,0424	4,8221	4,6355	1,0195
5,2176	3,0294	4,2956	4,0324	4,4846	4,6818	1,3139
5,3277	2,8549	4,0428	4,1347	4,3967	4,6758	1,1732
4,8028	2,8573	3,8545	3,3253	3,9670	4,3928	0,8797
5,0963	2,6222	4,1712	4,2242	4,4995	4,5285	1,3006
5,1362	2,5911	4,1135	3,7071	4,2572	4,4837	0,9552
5,2945	2,7959	4,3483	4,1842	4,5750	4,4271	1,0477
4,9111	2,7118	3,9775	3,7060	4,1637	4,3172	1,0022
5,3349	2,7916	4,1068	4,1549	4,4325	4,6187	0,9390
5,0853	2,6128	3,6136	3,7032	3,9617	4,3484	0,9058
5,1645	2,6212	4,2861	3,9646	4,4554	4,3262	0,8704
5,3867	2,9445	4,3267	4,1548	4,5502	4,7915	1,1735
5,0332	2,5453	4,2254	4,1413	4,4864	4,4926	0,8938
5,1274	2,9571	3,3789	4,2574	4,3113	4,6488	1,1602
4,9400	2,7251	3,6872	3,7721	4,0327	4,4722	1,2022
4,8940	2,6580	4,1650	3,9759	4,3817	4,4662	0,8513
5,0693	2,5051	3,9620	4,1515	4,3680	4,4686	1,2279
5,0980	2,7643	3,7700	4,1908	4,3305	4,6085	1,1055
5,0763	2,8865	3,5677	3,8259	4,0147	4,5896	1,2284
5,3874	2,7513	4,5316	4,0087	4,6455	4,3333	0,9818
4,8443	2,7853	3,6653	4,1082	4,2419	4,2726	1,1402
5,0814	2,6946	3,8337	4,0208	4,2382	4,6726	1,2810
4,8407	2,7324	3,5360	3,4423	3,7906	4,2007	0,8859
4,9561	2,7818	3,6948	3,8729	4,0939	4,4473	0,9090
5,0799	2,6990	4,1505	3,8231	4,3180	4,3993	0,9425
5,0130	2,6902	3,7079	3,8619	4,0927	4,5337	0,9590
4,8229	2,9685	3,4972	3,9863	4,1083	4,2930	1,0406
4,9877	2,8751	3,7155	3,9290	4,1363	4,4710	0,9912
4,9994	2,5775	4,0557	3,8783	4,2771	4,6170	0,8751
4,9823	2,8451	3,9703	3,8200	4,2026	4,8228	1,1143
4,9599	2,9542	3,8476	4,1304	4,3127	4,5297	1,1584
4,9611	2,9138	3,7712	3,8957	4,1390	4,4413	0,9365

$\ldots = 187{,}3435$ $\quad \Sigma h' = 102{,}3795$ $\quad \Sigma g = 146{,}6781$ $\quad \Sigma m = 145{,}9810$ $\quad \Sigma e = 158{,}4414$ $\quad \Sigma c = 166{,}4476$ $\quad \Sigma t' = 39{,}2422$

$\ldots^2 = 949{,}4394$ $\quad \Sigma h'^2 = 284{,}0179$ $\quad \Sigma g^2 = 584{,}7524$ $\quad \Sigma m^2 = 577{,}5952$ $\quad \Sigma e^2 = 680{,}1131$ $\quad \Sigma c^2 = 749{,}5852$ $\quad \Sigma t'^2 = 42{,}4193$

$\Sigma ph' = 518{,}4904$ $\quad \Sigma pe = 803{,}0855$ $\quad \Sigma pc = 843{,}1286$ $\quad \Sigma pt' = 198{,}8746$ $\quad \Sigma h'e = 438{,}4335$

$\Sigma h'c = 460{,}6981$ $\quad \Sigma h't' = 108{,}8511$ $\quad \Sigma ec = 713{,}2013$ $\quad \Sigma et' = 168{,}2172$ $\quad \Sigma ct' = 176{,}8219$

$\Sigma pg = 743{,}7164$ $\quad \Sigma pm = 739{,}7631$ $\quad \Sigma h'g = 405{,}6890$ $\quad \Sigma h'm = 404{,}0111$ $\quad \Sigma gm = 579{,}3482$

$\Sigma gc = 660{,}2138$ $\quad \Sigma mc = 657{,}2006$ $\quad \Sigma gt' = 155{,}5113$ $\quad \Sigma mt' = 155{,}2456$

ANEJO N.º 3

DETERMINACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN A SUPERFICIE CONSTANTE

CUADRO NÚM. 1

Datos referidos a 10 hectáreas de regadío.

Nº de la explotación	Valor de la producción final P (pts.)	Nº de jornadas de trabajo h	Ganado G (pts.)	Maquinaria M (pts.)	Gastos anuales del capital circulante C (pts.)	Superficie de regadío homogeneizada (Ha.)
1/c/7	59.852	516	3.920	2.863	9.200	20,54
2/c/1	108.519	477	11.689	14.200	46.967	10,49
2/c/3	83.380	440	8.622	4.754	34.883	10,46
2/c/2	116.488	415	17.447	9.125	30.354	10,11
4/c/1	133.316	575	9.661	11.665	34.509	7,65
4/c/2	193.089	1.007	58.095	11.568	45.330	9,53
4/c/3	107.696	694	12.808	6.987	31.173	15,42
4/c/4	154.890	521	8.225	9.932	34.526	13,73
4/c/5	87.945	997	9.908	2.929	34.219	7,22
1/c/1	90.391	303	10.740	12.134	24.453	13,81
1/c/2	160.609	458	15.244	5.979	35.746	8,52
1/c/5	216.271	686	24.480	16.777	29.346	9,11
1/c/6	102.247	646	11.913	6.376	26.045	7,97
6/c/1	291.378	844	17.233	19.254	56.016	7,42
6/c/2	151.178	509	5.103	6.272	27.706	8,05
6/c/3	196.850	563	26.042	12.422	28.560	7,42
6/c/5	216.751	783	18.876	12.708	55.050	11,24
6/c/6	137.900	448	21.459	17.685	39.706	7,83
6/c/7	96.996	655	1.730	13.079	32.209	13,83
1/c/3	115.681	699	6.403	7.785	39.033	7,60
1/c/4	115.051	668	21.469	13.892	42.962	6,81
5/c/1	99.232	271	7.751	11.990	24.888	11,82
5/c/2	122.436	566	5.751	15.153	39.652	10,24
5/c/3	121.391	784	3.764	6.820	39.579	9,82
5/c/5	297.563	688	41.471	12.441	26.270	8,20
5/c/6	64.170	560	4.249	11.780	17.202	10,89
5/c/7	63.147	259	3.570	5.492	24.636	19,10
5/c/8	94.161	734	4.668	3.762	38.061	7,36
5/c/9	129.487	867	7.095	10.691	40.134	6,98
2/c/4	156.515	651	18.413	8.665	32.658	7,68
2/c/5	113.233	538	5.609	7.995	37.558	9,10
3/c/1	76.189	1.065	3.599	11.100	22.493	8,73
3/c/2	99.182	765	5.300	8.665	30.182	9,80
3/c/3	139.269	527	15.856	10.540	57.739	7,17
3/c/4	81.430	594	7.921	5.604	56.403	11,79
3/c/5	86.996	859	6.717	12.884	32.314	10,48
3/c/6	119.364	1.070	7.709	10.269	36.063	7,66

$\Sigma P = 4.800.243$ $\Sigma h = 23.702$ $\Sigma G = 470.510$ $\Sigma M = 372.237$ $\Sigma C = .1\ 293.825$

$\bar{P} = 129.736$ $\bar{h} = 640$ $\bar{G} = 12.716$ $\bar{M} = 10.060$ $\bar{C} = 34.968$

CUADRO NÚM. 2

Logaritmos de los datos.

Nº de la explotación	(p) log P	(h') log h	(g) log G	(m) log M	(c) log C
1/c/7	4,7771	2,7126	3,5933	3,4568	3,9638
2/c/1	5,0355	2,6785	4,0678	4,1523	4,6718
2/c/3	4,9211	2,6434	3,9356	3,6771	4,5426
2/c/2	5,0662	2,6180	4,2417	3,9602	4,4822
4/c/1	5,1249	2,7597	3,9850	4,0669	4,5379
4/c/2	5,2857	3,0030	4,7635	4,0632	4,6564
4/c/3	5,0322	2,8414	4,1074	3,8443	4,4938
4/c/4	5,1900	2,7168	3,9151	3,9970	4,5381
4/c/5	4,9442	2,9987	3,9960	3,4667	4,5343
1/c/1	4,9561	2,4814	4,0310	4,0840	4,3883
1/c/2	5,2058	2,6609	4,1831	3,7766	4,5532
1/c/5	5,3350	2,8363	4,3888	4,2247	4,4675
1/c/6	5,0096	2,8102	4,0760	3,8045	4,4157
6/c/1	5,4644	2,9263	4,2363	4,2845	4,7483
6/c/2	5,1794	2,7067	3,7078	3,7974	4,4426
6/c/3	5,2941	2,7505	4,4157	4,0942	4,4558
6/c/5	5,3360	2,8938	4,2759	4,1041	4,7408
6/c/6	5,1396	2,6513	4,3316	4,2476	4,5989
6/c/7	4,9868	2,8162	3,2380	4,1166	4,5080
1/c/3	5,0632	2,8445	3,8064	3,8913	4,5914
1/c/4	5,0571	2,8248	4,3318	4,1428	4,6331
5/c/1	4,9966	2,4330	3,8894	4,0788	4,3960
5/c/2	5,0879	2,7528	3,7597	4,1805	4,5983
5/c/3	5,0842	2,8943	3,5756	3,8338	4,5975
5/c/5	5,4736	2,8376	4,6177	4,0948	4,4195
5/c/6	4,8073	2,7482	3,6283	4,0711	4,2356
5/c/7	4,8003	2,4130	3,5527	3,7397	4,3916
5/c/8	4,9739	2,8657	3,6691	3,5754	4,5805
5/c/9	5,1121	2,9380	3,8509	4,0290	4,6035
2/c/4	5,1945	2,8136	4,2651	3,9378	4,5140
2/c/5	5,0539	2,7308	3,7489	3,9028	4,5747
3/c/1	4,8819	3,0273	3,5562	4,0453	4,3520
3/c/2	4,9964	2,8837	3,7243	3,9378	4,4897
3/c/3	5,1438	2,7218	4,2002	4,0228	4,7615
3/c/4	4,9108	2,7738	3,8988	3,7485	4,7513
3/c/5	4,9395	2,9340	3,8272	4,1200	4,5094
3/c/6	5,0769	3,0294	3,8870	4,0116	4,5570

$\Sigma p = 187{,}9376$ $\Sigma h' = 102{,}9723$ $\Sigma g = 147{,}2789$ $\Sigma m = 146{,}5825$ $\Sigma c = 167{,}2966$

$\Sigma p^2 = 955{,}6281$ $\Sigma h'^2 = 287{,}3829$ $\Sigma g^2 = 590{,}0863$ $\Sigma m^2 = 582{,}2226$ $\Sigma c^2 = 757{,}2494$

$\Sigma ph' = 523{,}2656$ $\Sigma h'g = 410{,}0297$ $\Sigma gm = 584{,}3272$ $\Sigma mc = 663{,}1269$

$\Sigma pg = 749{,}4854$ $\Sigma pm = 745{,}1753$ $\Sigma pc = 850{,}1864$ $\Sigma h'm = 407{,}9971$

$\Sigma h'c = 465{,}8051$ $\Sigma gc = 666{,}5166$

ANEJO N.º 4

CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN PARCIAL PRODUCCIÓN FINAL-SUPERFICIE DE LA EXPLOTACIÓN

Se trata de calcular el coeficiente de correlación parcial $r_{pt'\cdot h'gmc}$ a partir de la línea de regresión:

$$p = 2{,}0235 + 0{,}1555\, h' + 0{,}0252\, t' + 0{,}2674\, g + 0{,}2131\, m + 0{,}1516\, c$$

En general, el coeficiente de correlación parcial de dos variables, de un total de n variables, viene dado por la fórmula:

$$r_{12\cdot 34\ldots n} = \frac{r_{12\cdot 34\ldots(n-1)} - r_{n2\cdot 34\ldots(n-1)}\, r_{1n\cdot 34\ldots(n-1)}}{\sqrt{1 - r^2_{n2\cdot 34\ldots(n-1)}}\,\sqrt{1 - r^2_{1n\cdot 34\ldots(n-1)}}}$$

es decir, el coeficiente de correlación parcial es función de otros coeficientes de correlación parciales de un orden inferior; éstos, a su vez, pueden expresarse en función de otros de orden inferior, y así sucesivamente.

En el caso que nos ocupa, he aquí la serie de fórmulas a aplicar:

$$r_{pt'\cdot h'gmc} = \frac{r_{pt'\cdot h'gm} - r_{ct'\cdot h'gm}\, r_{pc\cdot h'gm}}{\sqrt{1 - r^2_{ct'\cdot h'gm}}\,\sqrt{1 - r^2_{pc\cdot h'gm}}}$$

y, a su vez:

$$r_{pt'\cdot h'gm} = \frac{r_{pt'\cdot h'g} - r_{mt'\cdot h'g}\, r_{pm\cdot h'g}}{\sqrt{1 - r^2_{mt'\cdot h'g}}\,\sqrt{1 - r^2_{pm\cdot h'g}}}$$

$$r_{ct'\cdot h'gm} = \frac{r_{ct'\cdot h'g} - r_{mt'\cdot h'g}\, r_{cm\cdot h'g}}{\sqrt{1 - r^2_{mt'\cdot h'g}}\,\sqrt{1 - r^2_{cm\cdot h'g}}}$$

$$r_{pc\cdot h'gm} = \frac{r_{pc\cdot h'g} - r_{mc\cdot h'g}\, r_{pm\cdot h'g}}{\sqrt{1 - r^2_{mc\cdot h'g}}\,\sqrt{1 - r^2_{pm\cdot h'g}}}$$

Por otra parte, tenemos que:

$$r_{pt'\cdot h'g} = \frac{r_{pt'\cdot h'} - r_{gt'\cdot h'}\, r_{pg\cdot h'}}{\sqrt{1 - r^2_{gt'\cdot h'}}\,\sqrt{1 - r^2_{pg\cdot h'}}} \qquad r_{mt'\cdot h'g} = \frac{r_{mt'\cdot h'} - r_{gt'\cdot h'}\, r_{mg\cdot h'}}{\sqrt{1 - r^2_{gt'\cdot h'}}\,\sqrt{1 - r^2_{mg\cdot h'}}}$$

$$r_{pm\cdot h'g} = \frac{r_{pm\cdot h'} - r_{gm\cdot h'}\, r_{pg\cdot h'}}{\sqrt{1 - r^2_{gm\cdot h'}}\,\sqrt{1 - r^2_{pg\cdot h'}}} \qquad r_{ct'\cdot h'g} = \frac{r_{ct'\cdot h'} - r_{gt'\cdot h'}\, r_{cg\cdot h'}}{\sqrt{1 - r^2_{gt'\cdot h'}}\,\sqrt{1 - r^2_{cg\cdot h'}}}$$

$$r_{cm\cdot h'g} = \frac{r_{cm\cdot h'} - r_{gm\cdot h'}\, r_{cg\cdot h'}}{\sqrt{1 - r^2_{gm\cdot h'}}\,\sqrt{1 - r^2_{cg\cdot h'}}} \qquad r_{pc\cdot h'g} = \frac{r_{pc\cdot h'} - r_{gc\cdot h'}\, r_{pg\cdot h'}}{\sqrt{1 - r^2_{gc\cdot h'}}\,\sqrt{1 - r^2_{pg\cdot h'}}}$$

y, a su vez:

$$r_{pt'\cdot h'} = \frac{r_{pt'} - r_{ph'}\, r_{t'h'}}{\sqrt{1 - r^2_{ph'}}\,\sqrt{1 - r^2_{t'h'}}} \qquad r_{mt'\cdot h'} = \frac{r_{mt'} - r_{mh'}\, r_{t'h'}}{\sqrt{1 - r^2_{mh'}}\,\sqrt{1 - r^2_{t'h'}}}$$

$$r_{pg\cdot h'} = \frac{r_{pg} - r_{ph'}\, r_{gh'}}{\sqrt{1 - r^2_{ph'}}\,\sqrt{1 - r^2_{gh'}}} \qquad r_{mg\cdot h'} = \frac{r_{mg} - r_{mh'}\, r_{gh'}}{\sqrt{1 - r^2_{mh'}}\,\sqrt{1 - r^2_{gh'}}}$$

$$r_{ct'\cdot h'} = \frac{r_{ct'} - r_{ch'}\, r_{t'h'}}{\sqrt{1 - r^2_{ch'}}\ \sqrt{1 - r^2_{t'h'}}} \qquad r_{pm\cdot h'} = \frac{r_{pm} - r_{ph'}\, r_{mh'}}{\sqrt{1 - r^2_{ph'}}\ \sqrt{1 - r^2_{mh'}}}$$

$$r_{cm\cdot h'} = \frac{r_{cm} - r_{ch'}\, r_{mh'}}{\sqrt{1 - r^2_{ch'}}\ \sqrt{1 - r^2_{mh'}}} \qquad r_{cg\cdot h'} = \frac{r_{cg} - r_{ch'}\, r_{gh'}}{\sqrt{1 - r^2_{ch'}}\ \sqrt{1 - r^2_{gh'}}}$$

$$r_{gt'\cdot h'} = \frac{r_{gt'} - r_{gh'}\, r_{t'h'}}{\sqrt{1 - r^2_{gh'}}\ \sqrt{1 - r^2_{t'h'}}} \qquad r_{pc\cdot h'} = \frac{r_{pc} - r_{ph'}\, r_{ch'}}{\sqrt{1 - r^2_{ph'}}\ \sqrt{1 - r^2_{ch'}}}$$

y, finalmente:

$$r_{ph'} = \frac{n\,\Sigma ph' - \Sigma p\,\Sigma h'}{\sqrt{n\,\Sigma p^2 - (\Sigma p)^2}\ \sqrt{n\,\Sigma h'^2 - (\Sigma h')^2}} \qquad r_{pt'} = \frac{n\,\Sigma pt' - \Sigma p\,\Sigma t'}{\sqrt{n\,\Sigma p^2 - (\Sigma p)^2}\ \sqrt{n\,\Sigma t'^2 - (\Sigma t')^2}}$$

$$r_{pg} = \frac{n\,\Sigma pg - \Sigma p\,\Sigma g}{\sqrt{n\,\Sigma p^2 - (\Sigma p)^2}\ \sqrt{n\,\Sigma g^2 - (\Sigma g)^2}} \qquad r_{pm} = \frac{n\,\Sigma pm - \Sigma p\,\Sigma m}{\sqrt{n\,\Sigma p^2 - (\Sigma p)^2}\ \sqrt{n\,\Sigma m^2 - (\Sigma m)^2}}$$

$$r_{pc} = \frac{n\,\Sigma pc - \Sigma p\,\Sigma c}{\sqrt{n\,\Sigma p^2 - (\Sigma p)^2}\ \sqrt{n\,\Sigma c^2 - (\Sigma c)^2}} \qquad r_{h't'} = \frac{n\,\Sigma h't' - \Sigma h'\,\Sigma t'}{\sqrt{n\,\Sigma h'^2 - (\Sigma h')^2}\ \sqrt{n\,\Sigma t'^2 - (\Sigma t')^2}}$$

$$r_{h'g} = \frac{n\,\Sigma h'g - \Sigma h'\,\Sigma g}{\sqrt{n\,\Sigma h'^2 - (\Sigma h')^2}\ \sqrt{n\,\Sigma g^2 - (\Sigma g)^2}} \qquad r_{h'm} = \frac{n\,\Sigma h'm - \Sigma h'\,\Sigma m}{\sqrt{n\,\Sigma h'^2 - (\Sigma h')^2}\ \sqrt{n\,\Sigma m^2 - (\Sigma m)^2}}$$

$$r_{h'c} = \frac{n\,\Sigma h'c - \Sigma h'\,\Sigma c}{\sqrt{n\,\Sigma h'^2 - (\Sigma h')^2}\ \sqrt{n\,\Sigma c^2 - (\Sigma c)^2}} \qquad r_{t'g} = \frac{n\,\Sigma t'g - \Sigma t'\,\Sigma g}{\sqrt{n\,\Sigma t'^2 - (\Sigma t')^2}\ \sqrt{n\,\Sigma g^2 - (\Sigma g)^2}}$$

$$r_{t'm} = \frac{n\,\Sigma t'm - \Sigma t'\,\Sigma m}{\sqrt{n\,\Sigma t'^2 - (\Sigma t')^2}\ \sqrt{n\,\Sigma m^2 - (\Sigma m)^2}} \qquad r_{t'c} = \frac{n\,\Sigma t'c - \Sigma t'\,\Sigma c}{\sqrt{n\,\Sigma t'^2 - (\Sigma t')^2}\ \sqrt{n\,\Sigma c^2 - (\Sigma c)^2}}$$

$$r_{gm} = \frac{n\,\Sigma gm - \Sigma g\,\Sigma m}{\sqrt{n\,\Sigma g^2 - (\Sigma g)^2}\ \sqrt{n\,\Sigma m^2 - (\Sigma m)^2}} \qquad r_{gc} = \frac{n\,\Sigma gc - \Sigma g\,\Sigma c}{\sqrt{n\,\Sigma g^2 - (\Sigma g)^2}\ \sqrt{n\,\Sigma c^2 - (\Sigma c)^2}}$$

$$\text{y} \qquad r_{mc} = \frac{n\,\Sigma mc - \Sigma m\,\Sigma c}{\sqrt{n\,\Sigma m^2 - (\Sigma m)^2}\ \sqrt{n\,\Sigma c^2 - (\Sigma c)^2}}$$

Los valores Σpg, Σm^2, etc., figuran calculados en el Anejo núm. 2, cuadro núm. 2, y sustituyéndolos en las fórmulas indicadas se tiene:

$r_{ph'} = 0{,}1369$ $\quad r_{pt'} = 0{,}2113$ $\quad r_{pg} = 0{,}6180$ $\quad r_{pm} = 0{,}5170$

$r_{pc} = 0{,}4190$ $\quad r_{h't'} = 0{,}1249$ $\quad r_{h'g} = 0{,}0395$ $\quad r_{h'm} = 0{,}2602$

$r_{h'c} = 0{,}0629$ $\quad r_{t'g} = -0{,}0343$ $\quad r_{t'm} = 0{,}3656$ $\quad r_{t'c} = 0{,}3582$

$r_{gm} = 0{,}2760$ $\quad r_{gc} = 0{,}2275$ $\quad r_{mc} = 0{,}4289$

A partir de estos valores hallados se determinan directamente:

$$r_{pt'\cdot h'} = 0{,}2017 \qquad r_{mt'\cdot h'} = 0{,}3477 \qquad r_{gt'\cdot h'} = -\,0{,}0296 \qquad r_{mg\cdot h'} = 0{,}2967$$
$$r_{pg\cdot h'} = 0{,}6299 \qquad r_{pm\cdot h'} = 0{,}5033 \qquad r_{ct'\cdot h'} = 0{,}3538 \qquad r_{cg\cdot h'} = 0{,}2306$$
$$r_{cm\cdot h'} = 0{,}4304 \qquad r_{pc\cdot h} = 0{,}4151$$

a partir de los cuales se obtiene:

$$r_{pt'\cdot h'g} = 0{,}2838 \qquad r_{mt'\cdot h'g} = 0{,}3734 \qquad r_{pm\cdot h'g} = 0{,}4266$$
$$r_{ct'\cdot h'g} = 0{,}3707 \qquad r_{cm\cdot h'g} = 0{,}3895 \qquad r_{pc\cdot h'g} = 0{,}3570$$

A su vez, sustituyendo estos valores en las correspondientes fórmulas obtenemos:

$$r_{pt'\cdot h'gm} = 0{,}1484 \qquad r_{ct'\cdot h'gm} = 0{,}2637 \qquad r_{pc\cdot h'gm} = 0{,}2290$$

y, finalmente:

$$\boxed{r_{pt'\cdot h'gmc} = 0{,}0937}$$

RESUMEN

Comienza el autor exponiendo en forma condensada los principios más importantes del análisis marginal, haciendo hincapié en el análisis de las funciones de producción en la agricultura. Al final de esta primera parte del estudio examina el autor en particular las funciones del tipo Cobb-Douglas, las más frecuentemente utilizadas en estudios de esta naturaleza.

En la segunda parte del trabajo se hace una aplicación práctica de la teoría al caso de las explotaciones agrícolas de regadío de la zona de La Violada, en la provincia de Zaragoza. Trátase con el detalle suficiente la forma de calcular una función global de producción y se determinan diversas funciones de este tipo aplicables a las explotaciones de la zona en cuestión, expresando las variables de la función bien en términos monetarios o en términos físicos y monetarios. Interprétanse los resultados del análisis y se intenta determinar, a partir de las funciones de producción calculadas, el tamaño óptimo de las explotaciones de la zona. A la vista de la escasa significación del factor superficie de cultivo en los resultados económicos de las explotaciones, se suprime esta variable de la función, calculando una nueva función de producción a superficie constante. Se analiza esta nueva función y, por un procedimiento indirecto, se obtiene fácilmente la dimensión óptima buscada.

RÉSUMÉ

L'auteur expose d'abord sous une forme condensée les principes essentiels de l'analyse marginale, en mettant l'accent sur l'analyse des fonctions de production en agriculture. A la fin de cette première partie, l'auteur étudie plus spécialement les fonctions du type Cobb-Douglas, les plus largement utilisées dans des études de cette nature.

Dans la deuxième partie, ces principes sont appliqués aux exploitations agricoles irriguées de la zone de La Violada, dans la province de Zaragoza. L'auteur expose en détail la façon de calculer une fonction globale de production. Plusieurs fonctions de ce type sont déterminées pour les exploitations en question, en considérant les variables de la fonction exprimées en termes monétaires, ainsi qu'en termes physiques et monétaires. Les résultats de l'analyse sont interprétés, et on essaie de déterminer, à partir des fonctions de production calculées, la dimension optimale des exploitations de la zone. Après constatation de l'influence minime de la superficie dans les résultats des exploitations, cette variable est éliminée et on calcule une nouvelle fonction de production à superficie constante. Cette nouvelle fonction est analysée et, d'une façon indirecte, on obtient facilement la dimension optimale recherchée.

SUMMARY

The author begins by stating in a condensed way the main principles of marginal analysis, with a special emphasis on the analysis of production functions in agriculture. At the end of this first part of the study, the author deals more particularly with the Cobb-Douglas production functions, wich are the most often used in studies of this kind.

In the second part of the study a practical application of the theory is made to some irrigated farms of the Violada region, in the province of Zaragoza. The author shows with sufficient detail how to calculate a global production function, and actually derives several functions of this type adapted to the farms of La Violada, the variables of the function being expressed in monetary terms as well as in both physical and monetary terms. The results of the analysis are interpreted and an attempt is made to determine optimum farm size in the region based on the calculated production functions. Since it is found that farm size has no influence on the economic results of the farms, the size of the farm is eliminated as a variable in the function, and a new production function is derived with the size kept at a constant level. This new function is analysed and, in an indirect way, the desired optimum size is easily found.